

SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 210
N° DE SÉRIE : 23

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ DE RENNES

U.E.R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Ahmed JEBLI

CORPS DES FRACTIONS ET TOPOLOGIES LINÉAIRES

Soutenue le 23 Mai 1975 devant la Commission d'Examen

MM. P. SAMUEL

Président

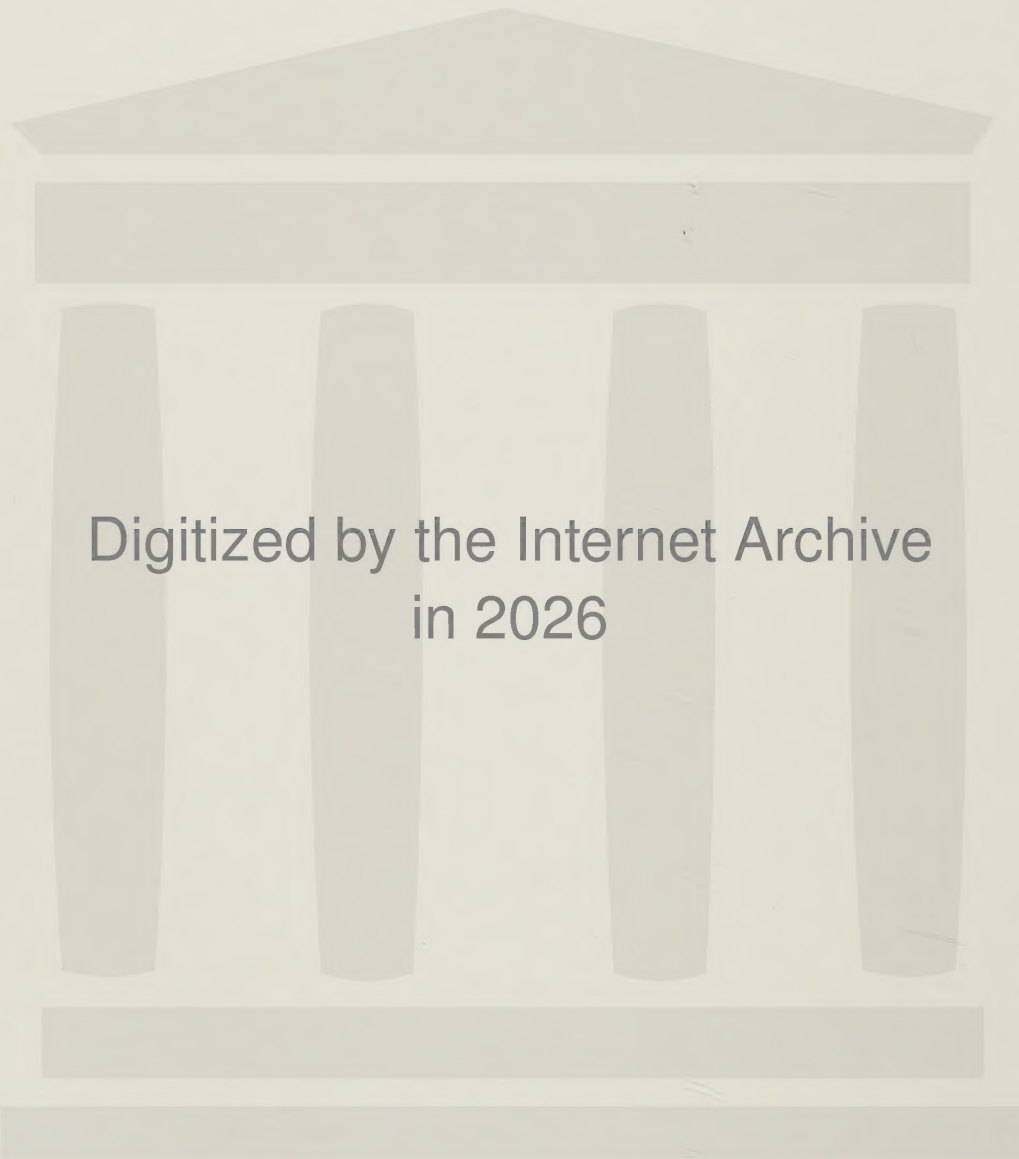
F. DRESS

J. GUERINDON

P. RIBENBOIM

R. RIVET

}
Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551505_0013

SÉRIE : A

N° D'ORDRE : 210

N° DE SÉRIE : 23

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ DE RENNES

U.E.R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Ahmed JEBLI

CORPS DES FRACTIONS ET TOPOLOGIES LINÉAIRES

Soutenue le 23 Mai 1975 devant la Commission d'Examen

MM. P. SAMUEL

Président

F. DRESS

J. GUERINDON

P. RIBENBOIM

R. RIVET

}
Examineurs



UNIVERSITE DE RENNES

.....

U.E.R. SCIENCES ET PHILOSOPHIE

.....

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON - LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECQ A.

Mathématiques

Professeurs

M. GUERINDON Jean
M. METIVIER Michel
M. GIORGIUTTI Italo
M. TOUGERON Jean-Claude
M. MIGNOT Alain
M. HOUDEBINE Jean
M. KEANE Michaël
M. BOULAYE Guy

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. BERTHELOT Pierre
M. BREEN Lawrence
M. CAMUS Jacques
M. CONZE Pierre
M. FERRAND Daniel
M. GUIVARC'H Yves
M. LE GOUPIL Jean
M. LERMAN Israël
M. NEDELEC Jean-Claude
M. TRILLING Laurent
M. VERJUS Jean-Pierre

Physique

M. VACHER Michel
M. VIGNERON Léopold
M. LE BOT Jean
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN Stéphane
M. LE MONTAGNER Serge
M. MEVEL Jean-Yves
M. MEINNEL Jean
M. REGENSTREIF Edouard
M. BRUN Pierre
M. LE ROUX Emile
M. DUBOST Gérard
M. ARQUES Pierre-Yves
M. HAEUSLER Claude
M. NUSIMOVICI Michel

M. GUIDINI J.
M. DECAMPS E.A.

Professeurs

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

Chimie

M. VENE Jean
M. LE MOAL Henri
M. LEVAS E.
M. PELTIER Daniel
M. PRIGENT J.
M. FOUCAUD André
M. LANG Jean
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT Claude-Roger
M. KERFANTO Michel (E.N.S.C.R.)
M. DABARD René
M. GRANDJEAN Daniel
M. LUCAS Jacques
M. MARTIN Guy

M. TALLEC André

Chimie Biologique

M. JOUAN Pierre
M. DUVAL Jacques

Géologie

M. COGNE Jean
Mlle DURAND Suzanne
M. BOILLLOT Gilbert

M. HAMEURT Jean-Marie
M. LARDEUX Hubert

Zoologie

M. RICHARD Gaston
M. MAILLET Pierre
M. RAZET Pierre
M. FOLLIOU Roger
M. ALLEGRET Paul
M. MANIEY Jacques
M. JOLY Jean-Marie
M. LEFEUVRE J.C.

M. CALLEC Jean-Jacques

Botanique

M. VILLERET Serge
M. CLAUSTRES Georges
Mlle GOAS Gabrielle
Mlle GOAS Marie
Mme LEMOINE Cécile

M. TOUFFET Jean

Philosophie

M. ORTIGUES Edmond

M. JACQUES Francis
M. BEYSSADE Jean-Marie

INTRODUCTION

L'objet du présent travail est l'étude des topologies sur le corps des fractions K d'un anneau intègre commutatif unitaire A qui sont compatibles avec sa structure de corps et A -linéaires (K considéré comme A -module). Les plus remarquables de ces topologies, qui jouent un rôle important dans notre étude, sont celles définies par les valuations de K positives sur A et celles définies par les idéaux non nuls des localisés de A .

Le chapitre 0 contient des rappels et quelques résultats élémentaires utiles pour la suite : on y démontre que, quand I parcourt l'ensemble des idéaux non nuls de A , les sous A -modules $I(1+I)^{-1}A$ de K forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie de corps $\mathcal{C}^A$ plus fine que toutes les topologies A -linéaires non discrètes sur K et compatibles avec sa structure de corps ; elle coïncide avec la topologie $\mathcal{C}_A$ définie par les idéaux non nuls de A lorsque le radical de Jacobson de A est non nul. Une autre propriété intéressante de cette topologie est qu'elle est la borne supérieure des topologies $\mathcal{C}_m$ (topologie des idéaux non nuls de A_m , m idéal maximal de A), dans le cas où tout idéal de A est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux maximaux, propriété qui sera utilisée lorsque A est noethérien de dimension 1.

Dans le chapitre I, nous montrons que l'étude des topologies A -linéaires de corps sur K , se fait d'une manière satisfaisante pour les anneaux noethériens de dimension 1 : lorsque A est de Dedekind, une étude des sous A -modules non nuls de K permet de voir que, comme $\mathcal{C}^A$, elles sont toutes bornes supérieures de familles de topologies $\mathcal{C}_p$ (p -adiques), résultat obtenu par Correl dans le cas des anneaux principaux. Après avoir montré que cette propriété caractérise les anneaux de Dedekind parmi certaines classe d'anneaux

intégralement clos (les anneaux de Krull et les anneaux "presque de Dedekind"), nous nous sommes attachés à déterminer les limites de validité de ce résultat : quels sont les anneaux noethériens ayant cette propriété ? Celle-ci peut être envisagée sous plusieurs formes et principalement les deux suivantes :

(P) Toute topologie A-linéaire de corps non discrète sur K est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{T}_p$ ($p \in \text{Spec} A$)

(V) Toute topologie A-linéaire de corps non discrète sur K est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{T}_v$ (v valuation de K, positive sur A).

Une condition nécessaire pour que (P) soit vérifiée, est que A soit de dimension 1. On montre alors que (P) passe aux localisés et qu'un anneau local de dimension A vérifie (P), si et seulement si il est analytiquement irréductible, d'où on déduit que (P) et (V) sont équivalentes et que A les vérifie, si et seulement si il est de dimension 1 et le morphisme $\text{Spec} A' \rightarrow \text{Spec} A$ est fini et injectif (i.e. A_p intègre pour tout $p \in \text{Spec} A$), A' étant la clôture intégrale de A.

En dimension supérieure 1, on cherche dans le chapitre II, les topologies de corps qui sont bornes supérieures de familles de topologies définies par des valuations essentielles de A (i.e. de A'). Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi et que la topologie considérée possède un système fondamental de voisinages de 0, M vérifiant $M = \bigcap_{v \in V} M A_v$ (où V est l'ensemble des valuations essentielles de A'). Ce sont alors des A' -modules. Comme A' est toujours un anneau de Krull, on est conduit à étudier le cas des anneaux de Krull et des topologies ayant un système fondamental de voisinages de 0 vérifiant l'égalité précédente, que nous appelons "divisoriels" : on montre alors qu'une telle topologie est borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles, si et seulement si pour tout voisinage

"divisoriel" M de O , l'ensemble $\text{supp}(K/M) \cap X^{(1)}$ est fini ($X^{(1)}$ est l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A). Cette condition est vérifiée si A est de Dedekind, car dans ce cas, toutes les topologies A -linéaires de corps sont artiniennes comme on le verra au chapitre III. Ensuite, nous donnons une application aux anneaux de polynômes ou de séries formelles sur un anneau de Dedekind : nous obtenons un théorème d'unicité de topologie "prolongeant" une topologie non discrète donnée. Pour ce faire, nous nous sommes placés dans la situation un peu plus générale d'un anneau de Krull B extension fidèlement plate de l'anneau de Dedekind A : une topologie de corps B -linéaire sur $\text{Fr}(B)$ n'induisant pas la topologie discrète sur A est borne supérieure de topologie $\mathcal{T}_q$ ($q \in X^1(B)$), si et seulement si elle possède un système fondamental de voisinages "divisoriels" de O . Enfin, un théorème analogue est démontré pour un anneau noethérien de dimension 1 localement analytiquement irréductible.

Le chapitre III est consacré aux topologies artiniennes : partant d'un résultat de Matlis, on commence par démontrer que toutes les topologies de corps sur K sont A -artiniennes, si et seulement si Z est noethérien de dimension 1, et s'il est semi-local, toutes les topologies non discrètes (linéaires) sont artiniennes : comme application, nous avons une démonstration du théorème de Cohen sur les anneaux intermédiaires entre un anneau intègre noethérien de dimension 1 et son corps des fractions. Lorsque $\dim A > 1$, les topologies artiniennes sont liées aux idéaux maximaux de hauteur 1 ($\mathcal{T}_p$ est A -artinienne $\iff p$ est maximal de hauteur 1). Si A est un anneau de Krull, une topologie artinienne possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de O est borne supérieure de topologies $\mathcal{T}_m$. Ceci constitue une généralisation des résultats du chapitre I. Si $A = D[X]$ où D est de Dedekind semi-local, il contient des idéaux maximaux de hauteur 1, et toutes les topologies artiniennes et "divisorielles" induisent sur D la topologie discrète.

Le dernier chapitre contient quelques résultats de compacité linéaire : la question que nous nous sommes posée, est de déterminer les anneaux intègres dont le corps des fractions est linéairement compact pour une topologie de corps, les résultats connus sont celui de Kaplansky sur les anneaux de valuations maximaux et celui de Ballet sur les anneaux noethériens dont le corps des fractions est linéairement compact pour la topologie discrète. Nous démontrons, que pour un anneau noethérien A , K est linéairement compact pour $\mathcal{C}_A$, si et seulement si A est local complet de dimension 1, résultat qui met en défaut une affirmation de Bourbaki. Enfin, nous donnons une réponse partielle à notre question : si A est noethérien de dimension 1 dont la clôture intégrale est un A -module de type fini, alors K est linéairement compact pour une topologie de corps, si et seulement si A est local complet. Signalons pour terminer, qu'il est plausible que la linéaire compacité de K implique que A est de dimension 1, nous n'avons pas réussi à le prouver ni à donner un contre exemple.

J'exprime toute ma reconnaissance à M. Guérindon pour l'aide très appréciable qu'il m'a apportée tout au long de la préparation et la rédaction de ce travail.

Je remercie vivement M. Samuel pour les conseils et suggestions qu'il m'a donnés, ainsi que pour l'honneur qu'il me fait en présidant mon Jury.

M. Dress s'est intéressé à mon travail après avoir suivi mes débuts de recherche à Bordeaux, qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements.

Je remercie MM. Ribenboim et Rivet qui ont bien voulu examiner cette thèse et faire partie du Jury.

Mes remerciements vont également à Melle Brunel qui a dactylographié ces pages avec soins et compétence.

CHAPITRE 0

GENERALITES

Etant donné un anneau intègre commutatif et unitaire A et K son corps des fractions, nous donnons dans ce chapitre quelques propriétés élémentaires des topologies linéaires sur K considéré comme A -module. Rappelons qu'une topologie sur un module est dite linéaire si elle possède un système fondamental de voisinages de 0 formé de sous modules.

Les valuations de K positives sur A définissent des topologies A -linéaires sur K compatibles avec sa structure de corps, ces topologies nous seront utiles par la suite, aussi donnons en quelques propriétés :

Lemme 0.1. : [(3) Chapitre 6] : *Pour que deux valuations d'un corps définissent la même topologie, il faut et il suffit qu'elles soient dépendantes (i.e. que leurs anneaux soient contenus dans un troisième anneau de valuation du corps).*

Lemme 0.2. : *Deux topologies d'un corps K définies par deux valuations ne sont comparables que si elles sont identiques, c'est-à-dire que si les deux valuations sont dépendantes.*

Cela résulte de Bourbaki, topologie générale, chapitre III, § 6, exercice 22. En voici une démonstration directe : soient v, v' deux valuations de K , $A_v, A_{v'}$, leurs anneaux et $\Gamma_v, \Gamma_{v'}$, les groupes de valeurs et supposons que v définit une topologie plus fine que celle définie par v' , cela veut dire qu'il existe $\alpha \in A_v$ tel que $\alpha A_v \subset A_{v'}$, d'où $v(x) \geq -v(\alpha)$ pour tout $x \in A_{v'}$. Si les valuations étaient indépendantes, il existerait pour $\gamma \in \Gamma_{v'}$ et $\gamma < -v(\alpha)$ un élément $x' \in K$ tel que :

$$\begin{cases} v'(x') = 0 \\ v(x') = \gamma \end{cases}$$

(théorème d'approximation [3]).

x' serait dans A_Y , et $v(x') < -v(\alpha)$, d'où contradiction.

Topologies définies par des idéaux :

Les idéaux non nuls de A forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'anneau sur K . C'est la plus fine des topologies A -linéaires non discrètes sur K et compatibles avec sa structure d'anneau, on la note $\mathcal{C}_A$.

Lemme 0.3. : *La topologie $\mathcal{C}_A$ est compatible avec la structure de corps de K (i.e. $x \rightarrow x^{-1}$ est continue), si et seulement si le radical de Jacobson de A est non nul.*

En effet $(1+I)^{-1} \subset 1+I$ pour tout idéal $I \neq (0)$ contenu dans $\text{Rad}(A)$. Il en résulte qu'à tout idéal premier p de A , on peut associer une topologie A -linéaire de corps sur K , définie par les idéaux non nuls de A_p , nous l'appellerons topologie p -adique $\mathcal{C}_p$. Nous nous attacherons par la suite à déterminer les topologies linéaires de K qui peuvent être obtenues à l'aide de ces topologies p -adiques et des topologies définies par les valuations positives sur A .

Le lemme précédent montre que lorsque $\text{Rad}(A) \neq (0)$, A est ouvert pour la topologie de corps $\mathcal{C}_A$, plus précisément :

Lemme 0.4. : *Un anneau intègre unitaire A est ouvert pour une topologie A -linéaire de corps sur $K = \text{Fr}(A)$, si et seulement si $\text{Rad}(A) \neq (0)$, et dans ce cas, $\mathcal{C}_A$ est la seule ayant cette propriété.*

En effet : si $\mathcal{C}$ est une topologie A -linéaire de corps sur K pour laquelle A est ouvert, tout idéal non nul de A est alors ouvert pour $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_A$ sera moins fine que $\mathcal{C}$, mais comme $\mathcal{C}_A$ est aussi plus fine que $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ d'où $\text{Rad}(A) \neq (0)$ en vertu du lemme précédent.

Remarque : En fait $\mathcal{C}_A$ est la seule topologie A-linéaire d'anneau sur K pour laquelle A est ouvert.

Corollaire 0.5. : Si A est intègre semi-local, $\mathcal{C}_A$ est la borne supérieure des topologies $\mathcal{C}_m$ ($m \in \Omega$: spectre maximal de A).

Cela résulte de l'égalité $A = A_{m_1} \cap \dots \cap A_{m_n}$ (où les m_i sont les idéaux maximaux de A) qui montre que A est ouvert pour $\sup_{m \in \Omega} \mathcal{C}_m$ d'où

$\mathcal{C}_A = \sup_{m \in \Omega} \mathcal{C}_m$ par application du lemme précédent.

La topologie $\mathcal{C}^A$: Lorsque $\text{Rad}(A) = (0)$, $\mathcal{C}_A$ n'est pas une topologie de corps sur K, mais elle peut être remplacée par une topologie A-linéaire sur K, qui est toujours compatible avec la structure de corps de K et qui jouera un rôle important dans notre étude.

Pour tout idéal non nul I de A, désignons par A_I l'anneau $(1+I)^{-1}A$. IA_I est alors un idéal de A_I contenu dans son radical de Jacobson.

Proposition 0.6. : Quand I parcourt l'ensemble des idéaux non nuls de A, les sous A-modules IA_I forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie de corps $\mathcal{C}^A$ sur K, qui est la plus fine des topologies A-linéaires non discrètes et compatibles avec la structure de corps de K.

Preuve :

- $\mathcal{C}^A$ est de façon évidente une topologie d'anneau séparée.
- C'est une topologie de corps en vertu de l'inclusion $(1+IA_I)^{-1} \subset 1+IA_I$, valable pour tout idéal non nul I de A.
- Si M est un sous A-module non nul de K, voisinage de 0 pour une topologie A-linéaire de corps $\mathcal{C}$ sur K, il existe un autre voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$, M' tel que $(1+M')^{-1} \subset 1+M$. On vérifie alors immédiatement que $I'A_I \subset M$ avec $I' = M' \cap A$, d'où $\mathcal{C}^A$ est plus fine que $\mathcal{C}$, et la dernière assertion est démontrée.

Corollaire 0.7. : Si dans A tout idéal est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux maximaux (par exemple si A est noethérien de dimension 1), alors

$$\mathcal{E}^A = \sup_{m \in \Omega} \mathcal{E}_m.$$

Preuve : Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de montrer que

$\mathcal{E}^A$ est moins fine que $\sup_{m \in \Omega} \mathcal{E}_m$: soient I un idéal non nul de A et $\Omega(I)$ la famille finie des idéaux maximaux de A qui le contiennent. L'anneau A_I est semi local et ses localisés en ses idéaux maximaux coïncident avec les A_m avec $m \in \Omega(I)$. Mais $\mathcal{E}_{A_I} = \sup_{m \in \Omega(I)} \mathcal{E}_m$ en vertu du corollaire 0.5, en particulier IA_I est ouvert pour $\sup_{m \in \Omega} \mathcal{E}_m$, donc $\mathcal{E}^A$ est moins fine que cette dernière topologie.

CHAPITRE I

ANNEAUX NOETHERIENS DE DIMENSION 1

Nous étudions dans ce chapitre, le cas des anneaux noethériens de dimension 1 : si A est intégralement clos, c'est un anneau de Dedekind et une étude simple des sous A -modules de K nous permet alors de montrer que toutes les topologies A -linéaires de corps sur K sont bornes supérieures de familles de topologies p -adique, dans le cas non intégralement clos nous montrons qu'un anneau noethérien possède cette propriété, si et seulement si il est de dimension 1 localement analytiquement irréductible.

A - Anneaux de Dedekind :

Dans cette partie, A désignera un anneau de Dedekind et K son corps des fractions : nous allons voir d'abord qu'il y a correspondance entre les sous A -modules non nuls de K et certaines familles d'idéaux entiers de A .

Pour tout sous A -module M de K , désignons par a_M l'idéal $M \cap A$ - $a_M \neq (0) \iff M \neq (0)$ - et $\mathcal{F}_M$ la famille des idéaux entiers $\mathcal{V}$ de A tels que $a_M \mathcal{V}^{-1} \subset M$.

Lemme A.1.1. : Pour tout sous A -module $M \neq (0)$, nous avons l'égalité :

$$M = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M} (a_M \mathcal{V}^{-1}).$$

En effet : M est la réunion des idéaux fractionnaires qui y sont contenus et qui contiennent a_M , un tel idéal est de la forme $a_M \mathcal{V}^{-1}$ où $\mathcal{V}$ est un idéal entier non nul de A .

Lemme A.1.2. : Le couple $(a_M, \mathcal{F}_M)$ associé au sous module M vérifie les propriétés suivantes :

(i) tout idéal de $\mathcal{F}_M$ est étranger à a_M

(ii) si $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M$ et $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$, alors $\mathcal{V}' \in \mathcal{F}_M$

(iii) $\mathcal{F}_M$ est stable par intersection finie.

Preuve :

i) Si $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M$ n'était pas étranger à a_M , il existerait un idéal premier p contenant a_M et $\mathcal{V}$, et on aurait :

$$\begin{cases} a_M p^{-1} \subset a_M \mathcal{V}^{-1} \subset M \\ \text{et} \\ a_M p^{-1} \subset A \end{cases}$$

d'où $a_M p^{-1} \subset a_M$, ce qui entraîne $p = A$.

ii) Résulte de l'implication $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \implies a_M \mathcal{V}'^{-1} \subset a_M \mathcal{V}^{-1}$.

iii) Découle de l'égalité $(\mathcal{V} \cap \mathcal{V}')^{-1} = \mathcal{V}^{-1} + \mathcal{V}'^{-1}$ valable pour tout couple d'idéaux de A .

Proposition A.1.3. : Il y a correspondance biunivoque entre les sous A -modules non nuls de K et les couples $(a, \mathcal{F})$ vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) du lemme précédent.

Démonstration : Compte tenu de ce qui précède, il suffit de montrer que si $(a, \mathcal{F})$ est un couple vérifiant les propriétés i), ii), iii) précédentes, il existe un et un seul sous module M tel que $a = a_M$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$: considérons un tel couple, et posons

$$M = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}} a \mathcal{V}^{-1},$$

alors :

a) M est un sous A -module de K en vertu de la propriété iii) et de l'égalité $(\mathcal{V} \cap \mathcal{V}')^{-1} = \mathcal{V}^{-1} + \mathcal{V}'^{-1}$.

b) Tout idéal fractionnaire contenu dans M est contenu dans un idéal $a \mathcal{V}^{-1}$ (avec $\mathcal{V} \in \mathcal{F}$), en effet : un idéal fractionnaire étant un A -module de type fini, chaque élément d'un système fini de générateurs appartient à un idéal de la forme $a \mathcal{V}^{-1}$ ($\mathcal{V} \in \mathcal{F}$). La propriété (iii) vérifiée par $(a, \mathcal{F})$ montre que l'idéal

fractionnaire est lui-même contenu dans un idéal de la même forme.

Si donc a' est un idéal entier contenu dans M , il existe $v \in \mathcal{F}$ tel que $a' \subset av^{-1}$ mis comme a et v sont étrangers, on a $a' \subset a$, ce qui veut dire que a est le plus grand idéal entier contenu dans M , il est donc égal à a_M .

$$c) \text{ De l'égalité } M = \bigcup_{v \in \mathcal{F}_M} av^{-1},$$

et du fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_M$ vérifient les propriétés i), ii), iii), on déduit que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$, en effet : soit $v \in \mathcal{F}$ alors il existe $v' \in \mathcal{F}_M$ tel que $av^{-1} \subset av'^{-1}$, d'où $v' \subset v$ et par suite $v \in \mathcal{F}_M$. On montre exactement de même que tout idéal de $\mathcal{F}_M$ appartient à $\mathcal{F}$.

Sur-anneaux de A : Ce sont les anneaux intermédiaires entre A et K . Le couple $(a_M, \mathcal{F}_M)$ permet de retrouver un certain nombre de résultats connus sur les sur-anneaux d'un anneau de Dedekind :

1 - Remarquons d'abord qu'un sous A -module non nul M de K est un sous anneau de K , si et seulement si $\mathcal{F}_M$ est stable par multiplication : c'est évident dans un sens et si M est un sous anneau, soient $v, v' \in \mathcal{F}_M$, alors il existe $v'' \in \mathcal{F}_M$ tel que $(a_M v^{-1})(a_M v'^{-1}) \subset a_M v''^{-1}$, on en tire :

$$a_M + a_M^2(vv')^{-1} \subset a_M + a_M v''^{-1} \subset a_M v''^{-1}$$

ou

$$a_M (a_M + vv') (vv')^{-1} \subset a_M v''^{-1}$$

mais comme a_M et vv' sont étrangers, on a : $a_M (vv')^{-1} \subset a_M v''^{-1}$, d'où $v'' \subset vv'$ et par suite $vv' \in \mathcal{F}_M$ (propriété ii)).

2 - La famille $\mathcal{F}$ associée à un sur-anneau de A est donc déterminée par les idéaux premiers qu'elle contient.

Si S est une partie multiplicativement stable de A , nous aurons pour $p \in X$:

$$p \in \mathcal{F}_{S^{-1}A}^{-1} \iff p^{-1} \in S^{-1}A \iff \Lambda \in p(S^{-1}) \iff p \cap S \neq \emptyset$$

d'où $\mathcal{F}_{S^{-1}A}^{-1} = \{\mathcal{V} \text{ entiers tel que } \mathcal{V} \cap S \neq \emptyset\}$, en particulier $A_p = \bigcup_{(\mathcal{V}, p)=1} \mathcal{V}^{-1}$,

et plus généralement si $\mathcal{S}$ est une famille d'idéaux premiers, on a :

$$\bigcap_{p \in \mathcal{S}} A_p = \bigcap_{p \in \mathcal{S}} \left(\bigcup_{(\mathcal{V}, p)=1} \mathcal{V}^{-1} \right) = \bigcup_{\substack{(\mathcal{V}, p)=1 \\ \forall p \in \mathcal{S}}} \mathcal{V}^{-1}$$

d'où :

Théorème A.1.4. [9] : *Tout sur-anneau de A est une intersection de localisés de A.*

En effet, soit B un sur-anneau, alors :

$$B = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}_B} \mathcal{V}^{-1} = \bigcup_{\substack{(\mathcal{V}, p)=1 \\ \forall p \in \mathcal{F}_B}} \mathcal{V}^{-1} = \bigcap_{p \notin \mathcal{F}_B} A_p$$

d'après l'égalité précédente.

Théorème A.1.5. [9] : *Tout sur-anneau de A est un anneau de fractions de A, si et seulement si le groupe des classes de A est de torsion.*

Ce théorème résulte du lemme suivant :

Lemme A.1.6. : *Soit $p \in X-(0)$. L'anneau $B = \bigcup_{m \geq 0} p^{-m}$ est un anneau de fractions de A, si et seulement si p est d'ordre fini dans le groupe des classes de A.*

Preuve :

1 - Si B est de la forme $S^{-1}A$, alors S rencontre p mais aucun autre idéal premier différent de p, d'où l'existence de $s \in S$ qui se factorise à l'aide de p seul, i.e. il existe $n > 0$ tel que $p^n = (s)$.

2 - Réciproquement, s'il existe s et n tels que $p^n = (s)$, soit $S = (1, s, s^2, \dots)$, alors $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_{S^{-1}A}^{-1} = \{p^n\}_{n \geq 0}$ d'où $B = S^{-1}A$ en vertu de la proposition A.1.3.

Nous pouvons maintenant donner la caractérisation des topologies A-linéaires

sur K annoncée au début de ce chapitre :

soient $\mathcal{C}$ une topologie A -linéaire de corps sur K et $\mathcal{M}$ un système fondamental de voisinages de 0 formé de sous modules :

Lemme A.1.7. : Si $M \in \mathcal{M}$ alors $\mathcal{F}_M$ contient "presque" tous les idéaux premiers élevés à n'importe quelle puissance.

Preuve : Nous savons qu'il existe $M' \in \mathcal{M}$ tel que $a_M (1+a_M)^{-1} A \subset M$ d'où, pour tout $a \in a_M$, il existe $\psi_a \in \mathcal{F}_M$ tel que

$$\frac{a}{1+a} \in a_M \psi_a^{-1}$$

ou

$$(a) \psi_a \subset (1+a) a_M \subset (1+a)$$

Mais comme (a) et $(1+a)$ sont étrangers, on doit avoir $\psi_a \subset (1+a)$, ce qui implique $(1+a) \in \mathcal{F}_M$ d'après la propriété (ii) de $\mathcal{F}_M$. D'autre part, pour tout premier p en divisant par a_M , et tout $n > 0$: $a_M + p^n = A$, d'où l'existence d'un $a \in a_M$, tel que $1+a \in p^n$, par conséquent $p^n \in \mathcal{F}_M$. Donc, sauf peut être les idéaux premiers de a_M , tous les idéaux premiers appartiennent à $\mathcal{F}_M$ ainsi que toutes leurs puissances.

Lemme A.1.8. : Si $M \in \mathcal{M}$, il existe un idéal entier a et une famille finie d'idéaux premiers $p_1, \dots, p_h$ tels que $M = a^{-1} a_M (A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_h})$.

Démonstration : Considérons les idéaux premiers (en nombre fini d'après le lemme précédent) $p_1, \dots, p_h$ pour lesquels il existe une plus grande puissance finie $p_i^{n_i}$ appartenant à $\mathcal{F}_M$. Parmi les idéaux de $\mathcal{F}_M$ qui se décomposent à l'aide des p_i seuls, il y en a un plus petit, c'est $a = p_1^{n_1} \dots p_h^{n_h}$. Donc tout $\psi \in \mathcal{F}_M$ s'écrit

$$\psi = p_1^{m_1} \dots p_h^{m_h} \psi' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq m_i \leq n_i \\ \psi' + p_i = A \quad i = 1, \dots, h \end{cases}$$

ou encore $\mathcal{V} = a \varphi \mathcal{V}'$ avec $\varphi = \prod_{i=1}^h p_i^{m_i - n_i}$

d'où $\mathcal{V}^{-1} = a^{-1} \mathcal{V}'^{-1} c^{-1} \subset a^{-1} \mathcal{V}'^{-1}$ car φ^{-1} est entier

$$a_M \mathcal{V}^{-1} \subset a_M a^{-1} \mathcal{V}'^{-1}$$

$$M = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M} a_M \mathcal{V}^{-1} \subset a^{-1} \left(\bigcup_{\substack{(\mathcal{V}', p_i)=1 \\ i=1, \dots, h}} a_M \mathcal{V}'^{-1} \right).$$

$\mathcal{V}'$ étant étranger aux p_i , il est étranger à a donc

$$a^{-1} \mathcal{V}'^{-1} = (a \cap \mathcal{V}')^{-1} = a^{-1} + \mathcal{V}'^{-1}$$

et

$$a_M (a^{-1} \mathcal{V}'^{-1}) = a_M a^{-1} + a_M \mathcal{V}'^{-1} \subset M$$

car $a \in \mathcal{F}_M$ et $\mathcal{V}'$ aussi parce qu'il se décompose à l'aide d'idéaux premiers distincts des p_i et dont toutes les puissances sont dans $\mathcal{F}_M$, finalement

$$M \supset a^{-1} \cdot \bigcup_{\substack{(\mathcal{V}', p_i)=1 \\ i=1, \dots, h}} (a_M \mathcal{V}'^{-1})$$

d'où

$$M = (a^{-1} a_M) \bigcup_{\substack{(\mathcal{V}', p_i)=1 \\ i=1, \dots, h}} \mathcal{V}'^{-1} = a^{-1} a_M (A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_h})$$

d'après la décomposition des A_p vue précédemment.

Théorème A.1.9. : Toute topologie A-linéaire de corps sur K , séparée et non discrète est borne supérieure d'une famille de topologies p -adiques ($p \in X$).

Démonstration : Soit M un voisinage de 0 pour une topologie de corps $\mathcal{C}$ sur K d'après le lemme précédent, nous avons :

$$(aa_M)^{-1} M = A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_h},$$

ce qui montre que chaque A_{p_i} est ouvert pour $\mathcal{C}$.

Soient alors $\Delta = \{p \in X : A_p \text{ ouvert pour } \mathcal{C}_\Delta\}$ et $\mathcal{C}_\Delta = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$.

il est clair que $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_\Delta$, mais le lemme précédent nous dit aussi que $\mathcal{C}_\Delta$ est plus fine que $\mathcal{C}$, d'où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\Delta$.

On pourra se reporter à [7] pour le cas des anneaux principaux.

Cherchons maintenant à quelles conditions, la famille Δ est finie : nous aurons besoin de la notion de topologie localement bornée :

Définition. [1, §6, Ex. 19] : Dans un anneau topologique, une partie B est dite "bornée" si pour tout voisinage U de 0 , il existe un voisinage V de 0 tel que $V B \subset U$ (VB désigne l'ensemble des produits $v.b$ avec $v \in V$, $b \in B$). Une topologie est dite "localement bornée", si elle admet un voisinage borné de 0 .

Soient toujours A de Dedekind et Δ un ensemble d'idéaux premiers $\neq \{0\}$, posons :

$$\mathcal{C}_\Delta = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$$

$$A_\Delta = \bigcap_{p \in \Delta} A_p$$

$\mathcal{C}'_\Delta$: la topologie définie sur K par les idéaux non nuls de A_Δ .

Proposition A.1.10. : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathcal{C}_\Delta$ est localement bornée
- b) Δ est fini
- c) $\mathcal{C}_\Delta = \mathcal{C}'_\Delta$
- d) $\mathcal{C}'_\Delta$ est une topologie de corps.

Preuve : Puisque A_Δ est aussi un anneau de Dedekind dont les idéaux premiers sont les $(pA_\Delta)_{p \in \Delta}$ et $(A_\Delta)_{pA_\Delta} = A_p$, il suffit de faire la démonstration lorsque $\Delta = \text{Spec} A = X$.

Puisque le radical d'un anneau de Dedekind est différent de (0) si et seulement si l'anneau est semi local, le résultat de

D'autre part, la borne supérieure d'une famille finie de topologies localement bornées étant localement bornée b) $\implies$ a) puisque les $\mathcal{C}_p$ sont localement bornées.

Montrons enfin que a) $\implies$ b) :

Supposons que A ne soit pas semi local, et soit $U = \bigcap_{i=1}^s p_i^{n_i} A_{p_i}$ un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_X$. Puisque A n'est pas semi-local, il existe $p_0 \in X$ distinct de $p_1, \dots, p_s$: $p_0 A_{p_0}$ est aussi un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_X$, montrons que $W \cup p_0 A_{p_0}$ pour tout voisinage de 0, W, ce qui prouvera que $\mathcal{C}_X$ n'est pas localement bornée.

Soit $W = \bigcap_{j=1}^t q_j^{m_j} A_{q_j}$ ($q_j \in X$), on distinguera deux cas :

α) Si tous les q_j sont différents de p_0 , il existe x et y tels que

$$\begin{cases} x \in \bigcap_{i=1}^s p_i^{n_i} A_{p_i} \subset U & \text{et} & x \notin p_0 A_{p_0} \\ y \in \bigcap_{j=1}^t q_j^{m_j} A_{q_j} \subset W & \text{et} & y \notin p_0 A_{p_0} \end{cases}$$

d'où $x, y \in W \cup p_0 A_{p_0}$ mais $xy \notin p_0 A_{p_0}$

β) Si l'un des q_j est égal à p_0 . Soit $q_1 = p_0$ par exemple. Posons :

$$a = p_0^{-l} p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s} \text{ avec } l > m_1$$

$$a' = p_0^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_t^{m_t}$$

il est clair que $a \in U$ et $a' \in W$ d'où $aa' \in U \cdot W$. D'autre part, on a :

$$v_{p_0}(aa') = v_{p_0}(a) + v_{p_0}(a') = -l + m_1 < 0,$$

ce qui implique $aa' \notin p_0 A_{p_0}$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in U$, $a' \in W$ tels que $aa' \notin p_0 A_{p_0}$, la proposition est démontrée.

Remarques :

1) On peut aussi démontrer l'implication c) $\implies$ b) en utilisant le fait que si

une topologie localement bornée est borne supérieure d'une famille de topologies qui sont localement bornées, alors elle est déjà borne supérieure d'une sous famille finie [1, §6, Ex. 20].

2) Certaines équivalences de la proposition précédente restent valables pour un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuations indépendantes de son corps des fractions. Plus précisément, soit $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ où les A_i sont des anneaux de valuations v_i de $K = \text{Fr}(A)$ deux à deux indépendants, pour $i \in I$ soit $\mathcal{C}_i$ la topologie définie par v_i , $\mathcal{C}_I = \sup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}'_I$ la topologie définie par les idéaux non nuls de A , $\mathcal{C}'_I$ est toujours plus fine que $\mathcal{C}_I$:

Proposition A.1.11 : Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\mathcal{C}_I$ est localement bornée
- ii) I est fini
- iii) $T_I = T'_I$.

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii) : Supposons que I soit infini et soit $U = \bigcap_{i=1}^s v_i(\alpha_i)$, où $v_i(\alpha_i) = \{x \in K : v_i(x) \geq \alpha_i\}$, un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_I$, il existe v appartenant à la famille $(v_i)_{i \in I}$, différente de $v_1, \dots, v_s$, soit A_v l'anneau de v , c'est aussi un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_I$.

Montrons que $W.U \not\subset A_v$ quel que soit $W = \bigcap_{j=1}^t v'_j(\beta_j)$: pour cela, on distingue deux cas :

a) $v \neq v'_1, \dots, v'_t$: alors le "théorème d'approximation" appliqué aux familles $(v_1, \dots, v_s, v)$ et $(v'_1, \dots, v'_t, v)$ assure l'existence de $x, y \in K$ tels que :

$$\begin{cases} v_i(x) = \alpha_i \\ v(x) = -u \end{cases}, \quad \begin{cases} v'_j(y) = \beta_j \\ v(y) = -\ell + u \end{cases}$$

où ℓ, u sont des éléments de Γ_v groupe des valeurs de v avec $\ell > 0$, on a évidemment $x \in U$, $y \in W$ d'où $xy \in U.W$, mais $xy \notin A_v$.

b) Si v est égale à l'une des v'_j , soit $v = v'_1$ par exemple, alors en considérant les deux familles $(v, v_1, \dots, v_s)$ et $(v, v'_2, \dots, v'_t)$, il existe $x \in K$ et $y \in K$ tels que

$$\begin{cases} v(x) = -\ell \\ v_1(x) = \alpha_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} v(y) = 1 \\ v'_j(y) = \beta_j \end{cases} \quad j = 2, \dots, t$$

d'où $xy \in U.W$, mais $v(xy) = \beta_1 - \ell < 0$ si on prend $\beta_1 < \ell$, c'est-à-dire $xy \notin A_v$ quand $\beta_1 < \ell$.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Si I est fini, on sait [2, Chap. 6], que A est semi local donc $\text{Rad}(A) \neq (0)$, d'où $\mathcal{C}'_I$ est une topologie de corps. D'autre part, $A = \bigcap_{\text{finie}} A_i$ est alors ouvert pour $\mathcal{C}_I$, d'où $\mathcal{C}_I = \mathcal{C}'_I$ d'après le chapitre 0, lemme 0.4.

iii) $\Rightarrow$ i) : Evident puisque $\mathcal{C}'_I$ est localement bornée. Remarquons enfin que $\mathcal{C}'_I$ peut être une topologie de corps, même si I est infini comme le montre l'exemple de l'anneau $\mathbb{Z}[[X]]$ dont le radical de Jacobson est non nul. Toutefois, si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est de caractère fini (i.e : $\forall x \in K^*, v_i(x) = 0$ sauf pour un nombre fini de i) et si A est de dimension 1 (ou si la trace de l'idéal maximal de chaque A_i est un idéal maximal de A), alors $\text{Rad}(A) \neq 0 \iff I$ est fini, en effet soient $a \neq 0$, $a \in \text{Rad}(A)$ et $v_1, \dots, v_n$ les valuations telles que $v_i(a) \neq 0$. Si I était infini, il existerait $v \in (v_i)_{i \in I}$ distinctes de $v_1, \dots, v_n$ d'où $v(a) = 0$, c'est-à-dire $a \notin p = m(A_v) \cap A$, et a ne serait pas dans $\text{Rad}(A)$ (dans les deux hypothèses). $m(A_v)$ est l'idéal maximal de A_v .

Avant de passer au cas dans lequel l'anneau A est non intégralement clos, montrons que le théorème A.1.9 caractérise les anneaux de Dedekind parmi certaines classes d'anneaux intégralement clos (les anneaux de Krull et les anneaux "presque de Dedekind").

Proposition A.1.12 : Soient A un anneau de Krull, $K = \text{Fr}(A)$ et $X^{(1)}$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Toute topologie A-linéaire de corps non discrète est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{C}_p$ ($p \in X^{(1)}$).

2) A est un anneau de Dedekind.

Preuve : Pour montrer que 1) $\implies$ 2), on va montrer que tout idéal premier $\neq (0)$ de A est de hauteur 1 : soit $q \in \text{Spec } A$, la topologie $\mathcal{C}_q$ est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{C}_p$ ($p \in X^{(1)}$), et cette famille est finie puisque $\mathcal{C}_q$ et les $\mathcal{C}_p$ sont localement bornées [1, § 6, Ex. 20]. $\mathcal{C}_q = \sup_{i=1, \dots, s} \mathcal{C}_{p_i}$ et une valuation essentielle de l'anneau de Krull, A_q est définie par un $p \in X^{(1)}$ et $\mathcal{C}_p$ est moins finie que $\mathcal{C}_q$, d'où

$$pA_p \supset p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$$

et

$$p \supset p_1^{(n_1)} \cap \dots \cap p_s^{(n_s)},$$

les puissances symboliques d'idéaux premiers étant primaires, on voit en prenant les radicaux, que p est égal à l'un des p_i d'où A_q n'a qu'un nombre fini de valuations essentielles, il est donc de valuation discrète d'où $h(\{q\}) = 1$.

Définition : Un anneau intègre A est dit "presque de Dedekind", si pour tout $p \in \text{Spec } A$, A_p est un anneau de valuation discrète : un tel anneau est de dimension 1 et pas nécessairement noethérien, voir [9, Appendix] où il est démontré qu'un anneau "presque Dedekind" est un anneau de Dedekind, si et seulement si tout idéal non nul est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux premiers.

Proposition A.1.13. Soit A un anneau "presque Dedekind", $K = \text{Fr}(A)$. Si toute topologie A-linéaire de corps non discrète de K est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{C}_p$ ($p \in X$), alors A est de Dedekind.

En effet : l'hypothèse implique que $\mathcal{C}^A$ est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{C}_p$, donc pour tout idéal non nul I de A, on a une inclusion

$$IA_I \supset p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$$

d'où

$$I \supset p_1^{n_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} \text{ (les } p_i \text{ étant maximaux)}$$

et par conséquent, les idéaux premiers contenant I sont parmi les p_i donc en nombre fini, la propriété indiquée dans la définition nous dit alors que A est de Dedekind.

Remarque : Un anneau "presque Dedekind" est de "Prüfer", et la proposition précédente nous montre que tous les anneaux de Prüfer ne vérifient pas le théorème A.1.9. Nous n'avons pas réussi à caractériser ceux qui le satisfont, même en dimension 1.

B - Cas non intégralement clos :

Dans toute cette partie, A désignera un anneau intègre noethérien

K son corps des fractions

$X = \text{Spec } A$, $X^{(1)}$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1

Ω = Spectre maximal de A

$\mathcal{V}_e$: l'ensemble des valuations essentielles de A' (clôture intégrale de A , qui est toujours un anneau de Krull)

$\mathcal{V}$, l'ensemble des valuations de K , positives sur A .

La question à laquelle nous répondons dans cette partie, est la suivante :

Quand A vérifie-t-il la propriété du théorème A.1.9. ?

Cette réciproque peut être envisagée sous plusieurs formes, qui sont les suivantes :

(P) Pour toute topologie A -linéaire de corps non discrete $\mathcal{C}$ de K , il existe

$$X' \subset X \text{ tel que } \mathcal{C} = \sup_{p \in X'} \mathcal{C}_p$$

(P₁) Pour toute topologie A -linéaire de corps non discrete $\mathcal{C}$, il existe

$$X' \subset X^{(1)} \text{ tel que } \mathcal{C} = \sup_{p \in X'} \mathcal{C}_p$$

(M) Pour toute topologie A-linéaire de corps $\mathcal{C}$ sur K, il existe $\Omega' \subset \Omega$
tel que $\mathcal{C} = \sup_{m \in \Omega'} \mathcal{C}_m$

(V) Pour toute topologie A-linéaire de corps $\mathcal{C}$ de K, il existe $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$
tel que $\mathcal{C} = \sup_{v \in \mathcal{V}'} \mathcal{C}_v$

(V_e) Même propriété que (V) mais avec $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}_e$.

Il y a des implications évidentes entre certaines de ces propriétés, nous allons voir qu'elles sont en fait équivalentes en étudiant les deux propriétés centrales (P) et (V), et caractérisons les anneaux qui les possèdent.

Propriété (P) :

Lemme B.1.1. : *Si A vérifie (P), alors tout anneau de valuation de K contenant A est contenu dans un unique anneau de valuation essentielle de A.*

Preuve : Soient v une valuation de K, positive sur A, V son anneau et $\mathcal{C}_v$ sa topologie, il existe $\Delta \subset X$ tel que $\mathcal{C}_v = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$: pour tout $p \in \Delta$, $\mathcal{C}_v$ est plus fine que $\mathcal{C}_p$ donc $\mathcal{C}_v$ est plus fine que toutes les topologies définies par les valuations essentielles de A_p , donc égale à ces dernières en vertu du lemme 0.2, cela implique d'une part que $(A_p)'$ est un anneau de valuation discrète A'_p , ($\text{ht}(p')=1$), et d'autre part que Δ est réduit à un seul élément. v et v_p , sont alors dépendantes et comme v_p , est discrète, on a $V \subset A'_p$.

Corollaire B.1.2. : *Si A vérifie (P), alors tout idéal premier $\neq (0)$ de A est la trace d'un idéal premier de hauteur 1 de A' .*

Soient en effet p un idéal premier non nul de A et V un anneau de valuation discrète de K dominant A_p (un tel anneau existe puisque A est noethérien, voir [11]), le lemme précédent nous dit alors que V est nécessairement un anneau de valuation essentielle de A, d'où le corollaire.

Remarque : Contrairement à ce qu'on pourrait croire, le fait que tout idéal premier de A soit la trace d'un idéal premier de hauteur 1 de A' , n'entraîne pas que A est de dimension 1, on trouve dans les EGA (IV 2e partie, page 101) l'exemple d'un anneau local noethérien intègre de dimension 2 qui satisfait à la conclusion du corollaire précédent. Nous donnons, dans ce qui suit, une condition pour qu'il en soit ainsi et qui est réalisée dans beaucoup de cas intéressants. Rappelons d'abord un lemme :

Lemme B.1.3. (EGA, IV, 1ère partie, proposition 23.2.7.1) :

Soient A local noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$ et A' la clôture intégrale de A . Alors A' est un anneau de Krull et si (V_λ) est la famille de ses valuations essentielles, il existe un sous anneau C de K , qui est une A -algèbre finie et telle que les (V_λ) soient les clôtures intégrales des anneaux C_{p_λ} où (p_λ) est la famille des idéaux premiers de hauteur 1 de l'anneau local C .

Considérons la propriété suivante : (EGA, IV, 1ère partie page 220, corollaire 23.2.9) :

(F) Pour tout anneau C tel que $A \subset C \subset A'$ et tel que C soit une A -algèbre finie et tout idéal premier minimal q de C , $q \cap A$ est minimal dans A .

Alors :

Proposition B.1.4. : *Soit A noethérien intègre tel que tout idéal premier est la trace d'un idéal premier de hauteur 1 de A' , alors si A_p vérifie (F) pour tout $p \in \text{Spec } A$, A est de dimension 1.*

En effet : Soient $p \in \text{Spec } A$ et p' un idéal premier de hauteur 1 de A' tel que A'_p domine A_p . Soit C une A_p -algèbre finie du lemme précédent, A'_p est la clôture intégrale d'un C_{p_λ} où p_λ est un idéal premier de hauteur 1 de C . On a alors :

$$p' \cap A'_p \cap C_{p_\lambda} = p_\lambda \cap C_{p_\lambda}$$

d'où

$$(p'A'_p, \cap A_p) \cap C_{p_\lambda} = p_\lambda C_{p_\lambda} \cap A_p = (p_\lambda C_{p_\lambda} \cap C_{p_\lambda}) \cap A_p$$

$$pA_p \cap C_{p_\lambda} = p_\lambda \cap A_p \quad \text{et} \quad pA_p = p_\lambda \cap A_p$$

et comme A_p vérifie (F), pA_p est de hauteur 1 dans A_p , d'où $h(p)=1$ et A est de dimension A .

La propriété (F) est vérifiée si A est universellement catenaire (EGA, IV, 1ère partie, page 221).

Cette remarque étant faite, nous allons voir que (P) implique que $\dim A = 1$:

théorème B.1.5. : Soient A noethérien intègre et K son corps des fractions, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Toute topologie A -linéaire de corps non discrète de K est borne supérieure d'une famille de topologies p -adiques ($p \in X$)
- 2) A est de dimension 1 et ses localisés sont analytiquement irréductibles.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 2) : Soient $p \in \text{Spec } A$ et p' un idéal premier de hauteur 1 de A' au-dessus de p (corollaire B.1.2.), v_p , la valuation essentielle qui lui est associée, d'après (1), il existe $\Delta \subset \text{Spec } A$ telle que

$$\mathcal{C}_{v_{p'}} = \sup_{p_i \in \Delta} \mathcal{C}_{p_i}$$

alors : pour tout $p_i \in \Delta$, toutes les valuations essentielles de A_{p_i} définissent des topologies moins fines, donc égales, à $\mathcal{C}_{v_{p'}}$, on en déduit que $(A_{p_i})'$ est un anneau de valuation discrète égal à $A'_{p'}$, d'où $h(p_i)=1$ et les p_i sont identiques, en particulier $A'_{p'}$ domine A_p et A_{p_i} , d'où $p=p_i$ et $ht(p)=1$. Par conséquent, A est de dimension 1.

Ceci étant, soit $\mathcal{C}$ une topologie A_p -linéaire de corps, elle est borne supérieure d'une famille de topologies q -adiques $\mathcal{C} = \sup_{q \in \Delta} \mathcal{C}_q$

d'où si M est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$,

$$M \supset q_1^{n_1} A_{q_1} \cap \dots \cap q_s^{n_s} A_{q_s}$$

($\mathcal{C}_q$ est définie par les $(qA_q)^n$ puisque A est de dimension 1), et

$$M \cap A = (M \cap A_p) \cap A \supset q_1^{n_1} \cap \dots \cap q_s^{n_s}$$

et puisque $M \cap A_p$ est un idéal de A_p , il est contenu dans pA_p , et par suite

$$p \supset q_1^{n_1} \cap \dots \cap q_s^{n_s}$$

donc p est égal à l'un des q_i . Mais alors $\mathcal{C}_p$ sera moins fin que $\mathcal{C}$ d'où

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_p$ puisque $\mathcal{C}_p$ est plus fine que $\mathcal{C}$ car celle-ci est A_p -linéaire :

en résumé, A est de dimension 1 et la propriété (P) se localise (i.e. pour

$p \in \text{Spec } A$, il y a une seule topologie A_p -linéaire de corps sur K), l'implication 1) $\Rightarrow$ 2) va résulter de la proposition suivante :

Proposition B.1.6. : *Sur A noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe une seule topologie A -linéaire de corps non discrète sur K .*
- 2) *A est local de dimension 1 de Mori unibranche.*
- 3) *A est local de dimension 1 analytiquement irréductible.*

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) : Si (1) est vérifiée, toutes les valuations essentielles de A vont définir la même topologie, elles sont donc identiques et A' est un anneau de valuation discrète, d'où A est local de dimension 1 unibranche et comme $\mathcal{C}_A$ doit être égal à $\mathcal{C}_A$, A contiendra un idéal non nul de A' donc son conducteur est $\neq (0)$, c'est-à-dire que A' est un A -module de type fini puisque A est noethérien.

2) $\Rightarrow$ 1) : A' est un anneau de valuation discrète, A -module de type fini. Si M est un sous A -module de K , $\neq K$. MA' est un A' -module de type fini (car

$MA' \neq K$) donc A -module de type fini d'où M est aussi de type fini. Si maintenant M est voisinage de 0 pour une topologie de corps $\mathcal{C}$ sur K , il existe $\alpha \in A - \{0\}$ tel que $\alpha M \subset A$, donc A est ouvert pour $\mathcal{C}$ d'où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ d'après 0.4., et l'unicité est établie.

2) $\iff$ 3) : Résultat bien connu.

Remarque : 1) est équivalente à l'existence d'une seule topologie A -linéaire d'anneau sur K (non discrète).

Fin de la démonstration de B.1.5.

2) $\implies$ 1) : Soient A de dimension 1 localement analytiquement irréductible, $\mathcal{C}$ une topologie A -linéaire de corps sur K et M un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$: M étant $\neq K$, il existe des idéaux premiers p tels que $M_p \neq K$, pour un tel idéal, M_p est un A_p -module de type fini d'où A_p est ouvert pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_p$. Si on désigne par Δ l'ensemble des p tels que $\mathcal{C}$ soit plus fine que $\mathcal{C}_p$, alors $\mathcal{C} = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$ car il existe I idéal non nul de A tel que $I A_I \subset M$ et $I A_I$ est voisinage de 0 pour $\mathcal{C}^A$ qui est la borne supérieure des $\mathcal{C}_p$ puisque A est noethérien de dimension 1 (corollaire 0.7.).

Corollaire B.1.7. : Soit A noethérien de dimension 1 localement analytiquement irréductible, $K = \text{Fr}(A)$. Une topologie A -linéaire de corps $\mathcal{C}$ non discrète de est borne supérieure d'une famille finie de topologies p -adiques, si et seulement si elle est localement bornée.

En effet : $\mathcal{C} = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$ et les $\mathcal{C}_p$ sont définies par des valuations discrètes d'après le théorème. On en déduit, comme dans le cas des anneaux de Dedekind, que Δ est fini si et seulement si $\mathcal{C}$ est localement bornée, elle est dans ce cas de la forme $\mathcal{C}_{A_I}$ où I est un idéal non nul de A .

Corollaire B.1.8. : Si A est semi-local, alors il vérifie (P), si et seulement si il est de Mori localement unibranche et de dimension 1.

D'après [23], A est de Mori si et seulement si ses localisés le sont.

Corollaire B.1.9. : Si A est de Mori de dimension 1, alors il vérifie (P), si et seulement si $\hat{A}_p$ est intègre pour tout p contenant le conducteur.

On sait en effet que A_p est intégralement clos pour tout p ne contenant pas le conducteur.

Corollaire B.1.10. : Si A est de dimension 1, alors il vérifie (P) si et seulement si pour tout idéal non nul I , le complété de A pour la topologie I -adique est localement intègre.

En effet : dans un sens c'est évident, il suffit de prendre I premier et inversement $(P) \implies \hat{A}_p$ intègre pour tout $p \supset I$, d'où (A, I) localement intègre [Gréco-Salmon : topics in $\mathfrak{m}$ -adic topologies, chapitre 10].

A propos des topologies I -adique, nous avons la proposition suivante qui généralise un résultat de Gréco [10 bis].

Proposition B.1.11. : Soient A un anneau noethérien de dimension 1 intègre et localement analytiquement irréductible, I un idéal non nul de A , alors le complété de A pour la topologie I -adique est intègre si et seulement si I est primaire.

Preuve : En effet, $(\hat{A}, I) = \prod_{p \supset I} \hat{A}_p$ d'après [5, proposition 1.2] produit d'anneaux locaux, donc s'il est intègre, il est local et par suite I est primaire, la réciproque résulte de ce que $\hat{A}_p$ est intègre pour tout p .

D'après [23], le hensélisé d'un anneau local intègre est de Mori, si et seulement si l'anneau est de Mori unibranche, d'où :

Proposition B.1.12. : *Un anneau local complet vérifie (P), si et seulement si il est de dimension 1.*

Exemples : d'anneaux vérifiant le théorème B.1.5.

- 1) Les anneaux locaux complets de dimension 1, par exemple l'anneau des séries formelles à une indéterminée T sur un corps, sans terme en T .
- 2) Un ordre d'un corps de nombres dont le conducteur n'est pas décomposé : un tel anneau est noethérien de dimension 1 de Mori, il vérifie (P) en vertu de B.1.9. Par exemple $\mathbb{Z}[2i]$ et plus généralement si f est un entier non décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$, l'anneau $\mathbb{Z}+fB$ vérifie (P) où B est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$.
- 3) Soit A local noethérien intègre de dimension 1, $K = \text{Fr}(A)$. Si A est japonais (par exemple s'il est de caractéristique 0), alors l'algèbre C définie dans B.1.3 est un anneau de Mori de dimension 1 localement analytiquement irréductible. On en déduit qu'une topologie A -linéaire de corps non discrète sur K est borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles, si et seulement si elle est C -linéaire.
- 4) Signalons qu'un anneau vérifiant (P) n'est pas nécessairement de Mori, voir l'exemple de [8].

Propriété (V) : Montrons enfin que (V) et (P) sont équivalentes.

Le théorème B.1.5. prouve que $(P) \implies (V_e) \implies (V)$.

Théorème B.1.13. : *Soit A noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) Pour toute topologie A -linéaire de corps non discrète $\mathcal{C}$ de K , il existe

$$\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \text{ telle que } \mathcal{C} = \sup_{\mathcal{V} \in \mathcal{V}'} \mathcal{C}_{\mathcal{V}}$$

- 2) A est de dimension 1 localement analytiquement irréductible.

Preuve :

1) $\implies$ 2) : Soit P un idéal premier non nul de A , alors il existe

$\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ telle que $\mathcal{E}_P = \sup_{v \in \mathcal{V}'} \mathcal{E}_v$, on peut supposer les $v \in \mathcal{V}'$ deux à deux indépendantes et en nombre fini puisque $\mathcal{E}_P$ et les $\mathcal{E}_v$ sont localement bornées, soit $\mathcal{V}' = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Si v' est une valuation essentielle de A_P , elle est dépendante de l'une des v_i car sinon : il existerait U_1 idéal de $A_{v_1}, \dots, U_n$ idéal de A_{v_n} tels que $U_1 \cap \dots \cap U_n \subset A_{v'}$ puisque $\mathcal{E}_{v'}$ est moins fine que $\mathcal{E}_P = \sup \mathcal{E}_{v_i}$, et le "théorème d'approximation" donnerait un élément de K contenu dans $U_1 \cap \dots \cap U_n$, et non dans $A_{v'}$ d'où contradiction.

La topologie $\mathcal{E}_v$ est donc l'une des $\mathcal{E}_{v_i}$, cela implique que les topologies définies par les valuations essentielles de A_P sont en nombre fini, donc $(A_P)'$ n'a qu'un nombre fini de valuations essentielles, c'est donc un anneau de Prüfer et comme il est de Krull, il est de valuation discrète d'où $Ht(p)=1$ et $\dim A=1$ et A_P est unibranche. Alors l'égalité $\mathcal{E}_P = \sup_{v \in \mathcal{V}'} \mathcal{E}_v$ implique que toute $v \in \mathcal{V}'$ est définie par un idéal premier de A' au-dessus de p , et comme A_P est unibranche, on a $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{(A_P)'}.$ A_P contient un idéal non nul de $(A_P)'$, il est finalement de Mori. Ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE II

DIMENSION SUPERIEURE A 1

Nous cherchons dans ce chapitre les topologies linéaires de corps sur $K = \text{Fr}(A)$ qui sont bornes supérieures de familles de topologies définies par des valuations essentielles de l'anneau noethérien intègre A (supposé de dimension quelconque).

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que la topologie considérée possède un système fondamental de voisinages de 0 , M vérifiant la condition $M = \bigcap_{\mathfrak{v} \in \mathcal{V}} M_{\mathfrak{v}}$ (tout M) qui sont alors des A' -modules (voir [25] Appendix "modules complets").

Comme A' est un anneau de Krull, les sous A' -modules de K vérifiant l'égalité précédente, que nous appellerons "divisories", s'étudient d'une manière analogue à celle qui a été donnée dans le chapitre I pour les anneaux de Dedekind :

A - Anneaux de Krull :

Dans cette partie A désignera un anneau de Krull, $K = \text{Fr}(A)$ et $X^{(1)}$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1.

Lemme A.2.1. : Soit M un sous A -module divisoriel de K , $a_M = M \cap A$ et $\mathcal{F}_M$ la famille des idéaux entiers divisoriels $\mathfrak{v}$ vérifiant $a_M : \mathfrak{v} \subset M$, alors :

(1) a_M est un idéal divisoriel

$$(2) M = \bigcup_{\mathfrak{v} \in \mathcal{F}_M} (a_M : \mathfrak{v})$$

En effet : la première assertion est évidente, pour la seconde remarquons que M est la réunion des idéaux fractionnaires divisoriels qui y sont contenus et qui contiennent a_M , un tel idéal a est de la forme :

$a_M : \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un entier divisoriel car $a_M : a \subset A$ et si $\mathcal{V} = a_M : a$ on a $a = a_M : \mathcal{V}$ puisque a_M, a et $\mathcal{V}$ sont divisoriels.

Lemme A.2.2. : Le couple $(a_M, \mathcal{F}_M)$ associé au module divisoriel M vérifie les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M$, l'idéal $\mathcal{V} a_M$ n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1

(2) si $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M$ et $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ alors $\mathcal{V}' \in \mathcal{F}_M$

(3) $\mathcal{F}_M$ est stable par intersection finie.

Si de plus, A est noetherien, il y a correspondance biunivoque entre les sous A -modules divisoriels de K et les couples $(a, \mathcal{F})$ vérifiant 1), 2), 3).

Preuve :

1) Soit $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_M$, si a_M et $\mathcal{V}$ étaient contenus dans un même idéal premier de hauteur 1, p on aurait :

$$a_M : p \subset a_M : \mathcal{V} \subset M \text{ et d'autre part } a_M : p \subset A$$

d'où $a_M : p \subset a_M$ ce qui implique $p = A$

2) Résulte de l'inclusion $a_M : \mathcal{V}' \subset a_M : \mathcal{V}$

3) Soit $\mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \mathcal{F}_M$. $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$ est divisoriel et on a :

$$a_M : (\mathcal{V} \cap \mathcal{V}') = \overbrace{a_M : \mathcal{V} + a_M : \mathcal{V}'}^{\subset \tilde{M}} \subset \tilde{M} = M$$

(pour un sous A -module V de K , $\tilde{V}$ désigne le module divisoriel associé,

i.e. $\tilde{V} = \bigcap_{p \in X^1} V_p$).

d'où $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' \in \mathcal{F}_M$.

Si maintenant $(a, \mathcal{F})$ est un couple formé d'un idéal entier divisoriel a et d'une famille $\mathcal{F}$ d'idéaux entiers divisoriels vérifiant 1), 2), 3), on voit par localisation que le module $M = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}} (a : \mathcal{V})$ est divisoriel. D'autre part $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_M$ et si A est noethérien, tout idéal entier $a' \subset M$ est contenu dans un $a : \mathcal{V}$ ($\mathcal{V} \in \mathcal{F}$) car a' possède un système fini de générateurs et $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie, d'où $a' \mathcal{V} \subset a$ et $a' (\mathcal{V} + a) \subset a$ on en tire $\tilde{a}' \subset a$ d'après 1). Donc a est le plus grand idéal entier contenu dans M d'où $a = a_M$. Pour tout $\mathcal{V}' \in \mathcal{F}_M$ il existe, pour les mêmes raisons de finitude, un $\mathcal{V} \in \mathcal{F}$ tel que $a_M : \mathcal{V}' \subset a_M : \mathcal{V}$ d'où $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}' \in \mathcal{F}_M$. Finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$.

Exemples :

1 - Si $p \in X^{(1)}$, A_p est un sous A -module divisoriel de K car $(A_p)_q = K$ si $q \in X^{(1)} - \{p\}$. $\mathcal{F}_{A_p}$ est formée des idéaux entiers divisoriels rencontrant $(A - p)$. En effet : si $a \in \mathcal{F}_{A_p}$ $A : a \subset A_p$ on en déduit que a n'est pas contenu dans p car sinon on aurait $A : p \subset A : a \subset A_p$ d'où $p(A : p) \subset p A_p \cap A = p$ ce qui donne $A : p \subset A$ et $p = A$.

Réciproquement si $a \not\subset p$ soit $\alpha \in a$ tel que $v_p(\alpha) \leq 0$ pour $x \in A : a$ on aura $v_p(x\alpha) \geq 0$ d'où $v_p(x) \geq -v_p(\alpha) \geq 0$ c'est-à-dire $x \in A_p$ d'où $A : a \subset A_p$.

2 - Plus généralement si S est une partie multiplicativement stable de A , $S^{-1}A$ est un A -module divisoriel et $a \in \mathcal{F}_{S^{-1}A}$ si et seulement si $a \not\subset p$ pour $p \in X^{(1)}$ tel que v_p soit nulle sur S : Cela résulte de l'exemple précédent et de l'égalité $S^{-1}A = \bigcap_{p \in X_S^{(1)}} A_p$ où $X_S^{(1)}$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1, tel que S_p soit nulle sur S .

Proposition A.2.3. : Un anneau intermédiaire entre A et K est A-module "divisoriel" si et seulement si il est intersection d'anneaux de valuations essentielles de A.

Preuve :

1 - Il est clair qu'une intersection d'anneaux de valuations essentielles de A est un A-module divisoriel.

2 - Soit B un sur-anneau divisoriel de A, nous avons d'après le lemme A.2.1.

$$B = \bigcup_{a \in \mathcal{F}_B} (A : a)$$

$$\text{et } B = \bigcup_{\substack{a \notin p \\ \forall p \notin \mathcal{F}_B}} (A : a)$$

$$\text{l'exemple 1 précédent montre que } B = \bigcup_{\substack{a \notin p \\ \forall p \notin \mathcal{F}_B}} (A : a) = \bigcap_{p \notin \mathcal{F}_B} A_p$$

Corollaire A.2.4. : Tout transformé de Nagata de A est une intersection d'anneaux de valuations essentielles de A [Nagata, Memoirs of the College of Sciences, Kyoto, 30, serie A, n° 1, 1956].

Si a est un idéal de A, la famille $(a^n)_{n \geq 0}$ vérifie bien les propriétés 1), 2), 3) de A.2.2. .

Corollaire A.2.5. : Tout sur-anneau divisoriel de A est un anneau de fractions de A si et seulement si le groupe des classes de diviseurs de A est de torsion (cf. CLABORN [6 bis]).

Ce corollaire se démontre comme dans le cas des Dedekind en considérant le transformé de Nagata relatif à $p \in X^{(1)}$.

Cette étude ne permet pas de caractériser toutes les topologies de corps sur K ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 comme bornes supérieures de topologies p-adiques.

Exemple : Soit $A = \mathbb{Z}[[T]]$ qui est un anneau de Krull de dimension 2 la topologie $\mathcal{C}_A$ est une topologie de corps sur $\text{Fr}(A)$ puisque $\text{Rad}(A) \neq \{0\}$, elle possède un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 (les idéaux principaux) mais elle n'est pas borne supérieure de topologie p-adique, $p \in X^1$ car A ne peut être ouvert pour une telle topologie comme le montre le lemme suivant :

Lemme A.2.6. : *Un anneau de Krull est ouvert pour une borne supérieure de topologies p-adiques ($p \in X^1$) si et seulement si il est de Dedekind semi-local.*

Preuve :

1 - Un anneau de Dedekind semi-local est bien ouvert pour la topologie borne supérieure de toutes les topologies p-adiques.

2 - Si A est un anneau de Krull ouvert pour une borne supérieure de topologies p-adiques ($p \in X^1$), il contiendrait un sous A-module de la forme

$\bigcap_{p_1}^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap \bigcap_{p_s}^{n_s} A_{p_s}$ ($p_i \neq p_j$) ; les p_i sont alors les seuls idéaux premiers de hauteur 1 de A car s'il y en avait un autre $p \neq p_i$

$i = 1, \dots, s$, le théorème d'approximation donnerait un élément $x \in K$

tel que

$$x \in \bigcap_{p_1}^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap \bigcap_{p_s}^{n_s} A_{p_s} \text{ et } v_p(x) < 0 \text{ d'où } x \notin A$$

finalement A est un anneau de Krull qui n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1 il est par conséquent de Dedekind semi local.

Nous avons cependant le théorème suivant :

Théorème A.2.7. : *Soit $\mathcal{C}$ une topologie de corps sur K possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de 0, alors $\mathcal{C}$ est borne supérieure*

d'une famille de topologies p -adiques ($p \in X^{(1)}$) si et seulement si pour tout voisinage divisoriel M de 0 , l'ensemble $X^{(1)}(M) = \text{supp}(K/M) \cap X^{(1)}$ est fini.

Démonstration : 1) Si $M = p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$ est un voisinage de 0 pour une borne supérieure de topologies p -adique alors $\text{supp}(K/M) \cap X^{(1)} = \{p_1, \dots, p_s\}$ car si $M_p \neq K$, p est égal à l'un des p_i puisque $(A_{p_i})_{p_i} = K$ dans le cas contraire.

2) Réciproquement soit $\mathcal{C}$ une topologie de corps possédant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 , $\mathcal{M}$ et telle que $X^{(1)}(M) = \text{supp}(K/M) \cap X^{(1)}$ soit fini pour tout $M \in \mathcal{M}$.

$X^{(1)}(M)$ est d'abord non vide puisque M est divisoriel et si $p \in X^{(1)}(M)$ $M_p \neq K$ d'où $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_p$.

D'autre part on sait qu'il existe $M' \in \mathcal{M}$ tel que

$$I' A_{I'} \subset M \quad (I' = M' \cap A)$$

d'où $\bigcap_{p \in X^{(1)}(M)} (I' A_{I'})_p \subset \bigcap_{p \in X^{(1)}(M)} M_p = M$ et puisque chaque $(I' A_{I'})_p$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_p$ on voit que M est ouvert pour une borne supérieure de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}$ est moins fine donc égale à $\sup \mathcal{C}_p$ où p est tel que A_p soit ouvert pour $\mathcal{C}$. On verra au chapitre 3 que les topologies ertiniennes satisfont le théorème précédent.

Nous allons retrouver ce résultat en déterminant explicitement la topologie $\mathcal{C}_M$ associée à un sous A -module divisoriel M de K par une méthode qui généralise celle de WARNER et HEINE (cf. [24] ; th. 2).

Pour tout sous A -module non nul M de K désignons, pour $p \in X^{(1)}$, par $v_p(M)$, la borne inférieure de l'ensemble des $(v_p(x))_{x \in M}$ s'il est borné inférieurement et $-\infty$ autrement et $\tilde{M} = \{x \in K : v_p(x) \geq v_p(M) \quad \forall p \in X^{(1)}\}$,

il est facile de voir que M est divisoriel si et seulement si $M = \tilde{M}$.

D'autre part si $(n_p)_{p \in X^1}$ est une famille d'entiers (ou $-\infty$) négatifs pour presque tous p alors il existe un module divisoriel tel que

$$v_p(M) = n_p.$$

Ceci dit soit M un sous A -module divisoriel de K , $A(M) = \bigcap_{p \in X^1(M)} A_p$:

Proposition A.2.8. : $\mathcal{C}_M$ est la topologie ayant un système fondamental de voisinages de $\emptyset$ formé des sous A -modules divisoriels U vérifiant :

$$a) X^1(U) = X^1(M)$$

b) il existe $n \geq 0$ tel que $v_p(U) = E(2^{-n} v_p(M))$ pour "presque tout $p \in X^1(M)$ ".

$E(x)$ désigne l'entier vérifiant $x \leq E(x) < x+1$.

Démonstration :

1 - Montrons que les U définissent bien une topologie :

Soient U, U' deux tels sous-modules, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ et un ensemble fini $B \subset X^1(M)$ tels que :

$$v_p(U) = E(2^{-n} v_p(M)) \text{ et } v_p(U') = E(2^{-m} v_p(M)) \text{ pour } p \in X^1(M) - B$$

Supposons $m \geq n$ et soit :

$$n_p = \begin{cases} v_p(U') & \text{si } p \in X^1 - B \text{ et } v_p(M) < 0 \\ \max \{v_p(U), v_p(U')\} & \text{autrement les } n_p \text{ sont négatifs pour} \end{cases}$$

presque tout p et définissent donc un sous A -module divisoriel W de K

$$W = \{x \in K \mid v_p(x) \geq n_p \quad \forall p \in X^1\}$$

on a $W \subset U \cap U'$ car $v_p(W) = n_p \geq \max \{v_p(U), v_p(U')\}$

et $X^1(W) = X^1(M)$ en vertu du fait que $v_p(M) = -\infty \iff p \notin X^1(M)$.

Nous avons donc bien une topologie pour laquelle M est ouvert.

2 - Cette topologie est compatible avec la structure d'anneau de K, en effet :

Soit U vérifiant a), b) et n_p la famille :

$$n_p = \begin{cases} -\infty & \text{si } p \in X^1 - X^1(M) \\ E(2^{-(n+1)} v_p(M)) & \text{si } p \in X^1(M) - B \text{ et } v_p(M) < 0 \\ \text{Max } \{0, v_p(0)\} & \text{autrement} \end{cases}$$

Cette famille définit un sous A-module divisoriel W de K qui vérifie $X^1(W) = X^1(M)$ et si x, y sont deux éléments de W, nous avons $v_p(xy) \geq v_p(U)$ pour tout $p \in X^1$ d'où $xy \in \hat{U} = U$ c'est-à-dire $W.W \subset U$.

Reste à montrer que si $x \in K - \{0\}$ il existe W' tel que $xW' \subset U$ il suffit de le faire si $x = \frac{1}{a}$ ($a \in A - \{0\}$), comme précédemment W' sera défini par les $v_p(W')$:

$$\text{soit } n_p = \begin{cases} v_p(U) & \text{si } v_p(a) \leq 0 \text{ ou si } v_p(U) = -\infty, \\ v_p(U) + v_p(a) & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le module divisoriel W' défini par n_p vérifie $xW' \subset U$, car si $\alpha \in W$ on a $v_p(\alpha x) = v_p(\alpha \cdot \frac{1}{a}) = v_p(\alpha) - v_p(a) \geq v_p(U)$. Finalement nous avons bien une topologie d'anneau sur K.

3 - Reste à voir que cette topologie $\mathcal{C}_M$ est la moins fine pour laquelle M est ouvert : soit $\mathcal{C}'$ une topologie linéaire d'anneau sur K pour laquelle M est ouvert, et montrons qu'elle est plus fine que $\mathcal{C}_M$.

Si U est un voisinage divisoriel de 0 pour $\mathcal{C}_M$, $u \in \mathbb{N}$ et B le sous-ensemble fini de X^1 en dehors duquel nous avons $v_p(U) = E(2^{-n} v_p(M))$.

Soit $\alpha \in \bigcup_{p \in X^1(M)} (p^{v_p(U) - E(2^{-n} v_p(M))} A_p)$

$$\text{Alors } v_p(\alpha) \geq \begin{cases} 0, & \text{si } p \in X^1(M) - B \\ v_p(U) - E(2^{-n} v_p(M)), & \text{si } p \in B. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{C}'$ est une topologie d'anneau, il existe U' voisinage de 0 pour $\mathcal{C}'$ tel que $U'^{2^n} \subset M$ d'où $2^n v_p(x) \geq v_p(M) \quad \forall x \in U'$ et $v_p(x) \geq E(2^{-n} v_p(M))$ pour tout $p \in X^1(M)$ mais alors $v_p(\alpha x) \geq v_p(U)$ pour tout $p \in X^1(U)$ d'où $\alpha x \in \tilde{U} = U$ c'est-à-dire $\alpha U' \subset U$ et U est ouvert pour $\mathcal{C}'$ et par conséquent $\mathcal{C}'$ est plus fine que $\mathcal{C}_M$.

Proposition A.2.9. : Soit M un sous A -module divisoriel de K , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $X^1(M)$ est fini
- 2) $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}_{A(M)} =$ borne supérieure d'une famille de topologies p -adiques ($p \in X^1$).

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) Si $X^1(M)$ est fini, $A(M) = \bigcap_{p \in X^1(M)} A_p$ est un anneau de Dedekind semi-local et d'après le chapitre I, $\mathcal{C}_{A(M)} = \sup_{p \in X^1(M)} \mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_{A(M)}$ sera moins fine que $\mathcal{C}_M$ car les $\mathcal{C}_p$ le sont d'où $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}_{A(M)}$.

2) $\Rightarrow$ 1) se fait comme dans la démonstration de A.2.7.

Remarque : $\mathcal{C}_M$ peut être une topologie de corps sans que $X^1(M)$ soit fini, il suffit de prendre un idéal α de A tel que $M = (1 + \alpha)^{-1} \cdot A$ ne soit pas semi-local, $\mathcal{C}_M$ est une topologie de corps mais $X^1(M)$ n'est pas fini.

Si $\mathcal{C}$ est une topologie de corps sur K ayant un système fondamental $\mathcal{M}$ de voisinages divisoriels de 0, nous avons $\sup_{M \in \mathcal{M}} \mathcal{C}_M = \mathcal{C}$ et si $\text{supp}(K/M) \cap X^1$ est fini pour tout $M \in \mathcal{M}$, chaque $\mathcal{C}_M$ sera une borne supérieure de $\mathcal{C}_p$ d'après A.2.9. donc $\mathcal{C}$ aussi et on retrouve ainsi A.2.7. .

Signalons enfin une caractérisation des bornes supérieures de familles finies de topologies p-adiques :

Théorème A.2.10 : Soit $\mathcal{C}$ une topologie de corps sur K ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0. Alors $\mathcal{C}$ est borne supérieure d'une famille finie de topologies p-adiques si et seulement si elle possède des éléments topologiquement nilpotents.

Preuve : Soit $a \in K - \{0\}$ topologiquement nilpotent

$$X^1(a) = \{p \in X^1 : v_p(a) \neq 0\} \quad X^1(0) \text{ est fini.}$$

Soit $p \in X^1 - X^1(a)$, M un voisinage divisoriel de 0 pour $\mathcal{C}$ et $m \in \mathbb{N}$ pour tout y , il existe n tel que $\frac{a^n}{y^m} \in M$ d'où

$$v_p(a^n) \geq v_p(M) + v_p(y^m) \quad \text{ou} \quad -m v_p(y) \geq v_p(M)$$

si donc on prend y tel que $v_p(y) = 1$ on trouve $v_p(M) \leq -m \quad \forall m$
c'est-à-dire $v_p(M) = -\infty$ et $p \notin X^1(M)$, autrement dit on a $X^1(M) \subset X^1(a)$,
d'où l'on tire que $X^1(M)$ est fini et alors A.2.7. montre que $\mathcal{C}$ est borne supérieure de topologies p-adiques avec $p \in X^1(M) \subset X^1(a)$, donc nécessairement en nombre fini.

Remarque : Remarquons que contrairement au cas des anneaux de Dedekind,

$\mathcal{C}$ peut être localement borné sans qu'elle soit borne supérieure de $\mathcal{C}_p$.

Il suffit là aussi de prendre un $(1 + a)^{-1} A$ non semi-local et la topologie de ses idéaux non nuls.

B - Cas non intégralement clos :

Soit A noethérien intègre non intégralement clos, A' sa clôture intégrale et X^1 l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A .

Fixons $p \in X^1$. Alors $\mathcal{C}_p$ possède un système fondamental de voisinages de 0, tel M, vérifiant $M = \bigcap_{q \in X^1} M_q$. Si on convient d'appeler module "divisoriel" un sous A-module non nul de K vérifiant l'égalité précédente, on a :

Proposition B.2.1. : Si toute topologie de corps sur K possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de 0 est borne supérieure de topologies p-adiques ($p \in X^1$) alors A_q est analytiquement irréductible pour tout $q \in X^1$.

En effet : soit $q \in X^1$. $(A_q)'$ est un anneau de Dedekind semi-local, q' est un idéal premier de $(A_q)'$ la topologie q' -adique sera borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{C}_p$ ($p \in X^1$) soit $\mathcal{C}_q = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$ on en déduit que tout $p \in \Delta$ est égal à q autrement dit $\mathcal{C}_q = \mathcal{C}_p$ d'où A_q est de Mori et q' est unique puisque si q'' est un autre idéal premier de $(A_q)'$ on aura $\mathcal{C}_{q''} = \mathcal{C}_q$, donc A_q est unibranche et finalement $\widehat{(A_q)}$ est intègre.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie comme le montre le cas intégralement clos mais comme dans le dernier cas on peut montrer que si A_p est intègre pour tout $p \in X^1$ alors une topologie de corps sur K possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de 0 est borne supérieure de topologies p-adiques ($p \in X^1$) si et seulement si pour un tel voisinage M, $\text{supp}(K/M) \cap X^1$ est fini.

C - Extensions fidèlement plates et application aux anneaux de polynômes et de séries formelles

Nous nous intéressons dans cette partie au cas des anneaux de polynômes (ou de séries formelles) et une généralisation.

Si A est noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$ B un anneau de polynômes sur A en un nombre fini de variables et $L = \text{Fr}(B)$, en général il n'y a pas unicité de topologies de corps B -linéaire sur L et induisant sur K une topologie donnée : par exemple si A est un anneau de valuation discrète $A[T]$ est un anneau de Krull de dimension 2, toute valuation v de $K(T)$ positive sur $A[T]$ non équivalente à aucune valuation essentielle de $A[X]$ induit sur K la topologie définie par la valuation de A ; en effet $\mathcal{C}_v$ ne peut induire sur K la topologie discrète car dans le cas on aurait $K[T] \subset A(v)$: anneau de v et v serait essentielle. Nous verrons qu'il y a unicité quand on se restreint aux topologies ayant un système fondamental de voisinages divisiorsiels de O .

Concernant les topologies induisant la topologie discrète, nous avons le :

Proposition C.2.1. : Soit A noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$ $B = A[T]$ $L = \text{Fr}(B)$ et $\mathcal{C}$ une topologie B -linéaire de corps sur L , alors $\mathcal{C}$ induit sur K la topologie discrète si et seulement si elle est plus fine qu'une topologie $\mathcal{C}_q$ où q est un idéal premier de hauteur 1 de B tel que $q \cap A = (0)$.

Preuve :

1 - Il est évident que si $q \cap A = (0)$ et $\mathcal{C}$ plus fine que $\mathcal{C}_q$ alors $\mathcal{C}$ induit sur K la topologie discrète

2 - Inversement : supposons que $\mathcal{C}$ induise sur K la topologie discrète il existe donc M sous B -module de L , ouvert pour $\mathcal{C}$ tel que $a_M \cap A = (0)$ où $a_M = M \cap A[T]$.

En prenant une décomposition primaire de a_M , l'intégrité de A nous montre qu'il existe un idéal premier q de $A[T]$ contenant a_M et véri-

fiant $q \cap A = (0)$, un tel idéal est tel que $M_q \neq L$ et alors $A[T]_q$ est un anneau de valuation discrète d'où l'on tire que l'anneau B_q est ouvert pour $\mathcal{C}$ qui est donc plus fine que $\mathcal{C}_q$.

Pour les topologies n'induisant pas sur K la topologie discrète, nous allons déterminer alors celles qui sont bornes supérieures de familles de topologies définies par des valuations essentielles de $A[T]$.

Cas où A est de Dedekind :

Nous allons nous placer dans le cas plus général d'une extension fidèlement plate :

A étant de Dedekind de corps des fractions K , B un anneau de Krull A -fidèlement plat et $L = \text{Fr}(B)$. Pour tout $p \in \text{Spec } A$, pB est un idéal divisoriel de B et $pB \neq B$ par fidèle platitude. En outre pour tout premier de hauteur 1 de B , $q \cap A$ est soit nul soit de hauteur 1 (condition "PDE" de SAMUEL [4]) et tout idéal premier de hauteur 1 de A est la trace d'un nombre fini seulement d'idéaux premiers de hauteur 1 de B .

Théorème C.2.2. : *Soit $\mathcal{C}$ une topologie B -linéaire de corps sur L n'induisant pas sur K la topologie discrète, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\mathcal{C}$ est borne supérieure d'une famille de topologies q -adiques ($q \in X^1(B)$)
- (2) $\mathcal{C}$ possède un système fondamental de voisinages divisoriels de 0.

Démonstration :

a - Il est clair que 1) $\implies$ 2) puisque les topologies q -adiques ainsi que leurs bornes supérieures possèdent un système fondamental de voisinages divisoriels de 0.

b - Inversement : Supposons 2) vérifiée et soit M un voisinage divisoriel de 0.

Remarquons d'abord que $M = \bigcap_{\substack{q \in X^1(B) \\ q \cap A \neq (0)}} M_q$ puisque $M_q = K$ si $q \cap A = (0)$

En effet, si pour un tel idéal q on avait $M_q \neq K$, M_q serait un B_q -module de type fini et A_q serait ouvert pour $\mathcal{C}$ et $q \cap A_q$ aussi et $\mathcal{C}$ induirait sur K la topologie discrète.

Soit Δ l'ensemble des $q \in X^1(B)$ tels que B_q soit ouvert pour $\mathcal{C}$:

$\mathcal{C}$ est plus fine que $\sup_{q \in \Delta} \mathcal{C}_q$.

Si maintenant M' est au voisinage divisoriel de 0 pour $\mathcal{C}$ vérifiant

$a_M, B_{a_M} \subset M$ (où $a_M = M' \cap B$) nous avons

$$\bigcap_{\substack{q \in X^1(B) \\ q \cap A \neq (0)}} (a_M, B_{a_M})_q \subset M$$

il s'agit de voir que dans cette intersection il n'y a qu'un nombre fini de localisations différentes de L , pour cela nous distinguons plusieurs cas :

i) Si $a_M \subset q$ alors $(a_M, B_{a_M}) \neq L$, ces q sont en nombre fini puisque B est un anneau de Krull.

ii) Si $a_M \not\subset q$ mais $q \cap A = q_i \cap A$ pour un certain q_i contenant a_M , comme les q_i sont en nombre fini, q appartiendra à l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de B au-dessus d'un $q_i \cap A$, il n'y en a qu'un nombre fini en vertu de la condition "PDE".

iii) Si $a_M \not\subset q$ et $q \cap A \neq q_i \cap A$ pour tout q_i contenant a_M , alors a_M est étranger à q puisque A étant de Dedekind $q \cap A$ est étranger aux $q_i \cap A$, soit donc $\pi \in (1 + a_M) \cap q$.

B_q étant un anneau de valuation discrète et $\pi \in q B_q$ on a $(B_q)_\pi = L$ (localisation par rapport à la partie $1, \pi, \pi^2, \dots$) mais comme $\pi \in 1 + a_{M'}$, on a aussi

$$(B_q)_\pi \subset B_q \cdot \frac{1}{1 + a_{M'}} = \left(\frac{a_{M'}}{1 + a_{M'}} \right)_q \quad (B_q = (a_{M'})_q),$$

d'où $(a_{M'}, B_{a_{M'}, q}) = L$.

On voit donc que les q pour lesquels $(a_{M'}, B_{a_{M'}, q}) \neq L$ sont en nombre fini donc M est ouvert pour $\sup_{q \in \Delta} \mathcal{C}_q$ d'où l'identité de ces deux topologies.

Corollaire C.2.3. : Etant donné $p \in \text{Spec } A$ les topologies de corps sur L ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de $\emptyset$ et induisant la topologie p -adique sur K sont les bornes supérieures de familles de topologies q -adiques avec $q \cap A = p$. Il y a unicité si et seulement si la valuation p -adique a un seul prolongement à L (positif sur B).

Pour établir ce corollaire il suffit de remarquer que si $\mathcal{C}_q$ induit la topologie p -adique sur K alors $q \cap A = p$.

Remarque C.2.4. : L'équivalence du théorème précédent n'est plus vraie si $\mathcal{C}$ induit sur K la topologie discrète, comme on peut le voir en prenant $A = \mathbb{Z}[[X]]$ et la topologie $\mathcal{C}_A$, qui ne peut alors être borne supérieure de topologies p -adiques (cf. lemme A.2.6.)

Dans le cas particulier des polynômes ou de séries formelles nous avons le :

Théorème C.2.5. : Soit A de Dedekind, $K = \text{Fr}(A)$ et $B = A[T]$ (ou $A[[T]]$) $L = \text{Fr}(B)$, alors il existe une et une seule topologie de corps sur L possédant un système fondamental de voisinages B -divisoriels et induisant sur K une topologie non discrète donnée.

En effet : Soit $\mathcal{C}$ une topologie B-linéaire de corps sur L induisant sur K une topologie $\mathcal{C}'$ non discrète : en vertu de A.1.9 $\mathcal{C}' = \sup_{p \in \Delta \subset X'(A)} \mathcal{C}_p$

et $\mathcal{C}$ est égal à $\sup_{\substack{q \in \Delta' \\ \Delta' \subset X'(B)}} \mathcal{C}_q$ d'après C.2.2. .

Les $q \in \Delta'$ sont exactement les idéaux de hauteur 1 de B au-dessus des $p \in \Delta$ donc égaux à pB , chaque pB étant minimal et le seul minimal de B au-dessus de p .

Cas des anneaux de Krull :

Quand on suppose A anneau de Krull, de dimension > 1 , l'équivalence de C.2.2. et le théorème C.2.5. ne sont plus vrais, plus précisément on a la :

Proposition C.2.6. : Soit A de Krull, $K = \text{Fr}(A)$, $B = A[X]$ et $L = \text{Fr}(B)$.

Si toute topologie de corps sur L possédant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 et n'induisant pas sur K la topologie discrète est borne supérieure de topologies q-adiques ($q \in X^1(B)$) alors A est de Dedekind.

Preuve : Les $\left(\frac{\alpha B}{1+\alpha B}\right)_{\alpha \in A - \{0\}}$ forment un système fondamental de voisinages

de 0 pour une topologie de corps sur L qui n'induit pas la topologie discrète sur K puisque $\alpha B \cap A = (\alpha)$, ils sont divisoriels car $(1+\alpha B)^{-1}$ est une intersection d'anneaux de valuations essentielles de B (proposition A.2.3.).

Cette topologie n'est borne supérieure de topologies q-adiques que si A est de dimension 1. En effet l'anneau $(1+\alpha B)^{-1} B$ serait ouvert pour une borne supérieure de topologies q-adiques et par conséquent de Dedekind semi-local, ce qui impliquerait que deux idéaux premiers de B contenant α (et ne coupant donc pas $1+\alpha B$) sont étrangers. En particulier si $p_1, p_2 \in X^1(A)$ tels que $\alpha \in p_1 \cap p_2$ alors $p_1 B$ et $p_2 B$ sont étrangers, donc p_1 et p_2 aussi, la conclusion résulte du lemme suivant (probablement déjà connu) :

Lemme C.2.7. : Un anneau de Krull dans lequel deux idéaux premiers de hauteur 1 sont étrangers quand ils sont distincts est un anneau de Dedekind.

Une démonstration simple est la suivante : soit P idéal premier de hauteur > 1 , comme il contient un idéal premier de hauteur 1 l'hypothèse faite implique qu'il en contient un seul, soit p_0 : si $Q \subset \text{Spec } A$ avec $Q \subset P$ alors ou $h(Q) = 1$ ou $p_0 \subset Q$ cela veut dire que $p_0 \in \bigcap_{P \in \mathcal{P}_A} P$ (idéaux premiers de A).

Comme A_p est de Krull il n'aura qu'un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1 et est donc de Dedekind et P serait de hauteur 1.

Cependant l'examen de la démonstration de C.2.2. nous montre que dans le cas des anneaux de Krull nous avons le résultat général suivant :

Proposition C.2.8. : Soient $A \hookrightarrow B$ deux anneaux de Krull vérifiant la condition "PDE", alors une topologie de corps sur $F(B)$ possédant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 et induisant sur $K = \text{Fr}(A)$ une topologie p-adique (ou une borne supérieure d'une famille finie de telles topologies) est borne supérieure de topologies q-adiques ($q \in X^1(B)$).

Remarque C.2.9. : Dans les hypothèses de la proposition précédente, l'existence d'une topologie "divisorielle" induisant $\mathcal{O}_p$ sur K équivaut à $i(p) \neq 0$ ou i est le morphisme $D(A) \longrightarrow D(B)$.

Cas non intégralement clos :

Nous avons dans ce cas l'analogue du théorème B.1.5.

Théorème C.2.9. : Soit A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions $B = A[T]$ et $L = \text{Fr}(A)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) Toute topologie de corps sur L possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de 0 est borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles de B .

2) A est de dimension 1 et ses localisés sont analytiquement irréductibles.

"divisoriel" est pris ici au sens de B.2.1. .

Preuve :

$1 \implies 2$: Si 1) est vraie la proposition C.2.6. montre que A' (clôture intégrale de A) est un anneau de Dedekind d'où $\dim A = 1$.

Si $p \in \text{Spec } A$ pB est un idéal premier de hauteur 1 de B et $\mathcal{C}_{pB}$ n'induit pas sur K la topologie discrète elle est donc borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles de B . On en déduit comme précédemment que B_{pB} est analytiquement irréductible et comme B_{pB} domine A_p , ce dernier sera aussi analytiquement irréductible.

$2 \implies 1$: Les seuls idéaux premiers de hauteur 1 de B ayant une intersection non nulle avec A sont les pB . Donc si M est un voisinage "divisoriel" de 0 , pour une topologie de corps sur L , on aura $M = \bigcap_{p \in X(A)} M_{pB}$.

La démonstration se fait alors comme dans le cas de Dedekind, en remarquant que l'hypothèse sur A_p implique que B_{pB} est unibranche [8] d'une part et que $B_{pB} = (A_p[T])_p A_p[T]$.

A_p étant de Mori, $A_p[T]$ l'est aussi d'après [23] donc B_{pB} est de Mori et par suite analytiquement irréductible.

Remarque : Le théorème précédent reste encore vrai si on prend $B = A[[T]]$ au lieu de $A[T]$.

CHAPITRE III

TOPOLOGIES ARTINIENNES

Une topologie linéaire sur un A -module M est dite artinienne, si elle possède un système fondamental de voisinages de 0 , (M_α) tel que M/M_α soit un A -module artinien. Les modules topologiquement artiniens ont été étudiés par Ballet dans sa thèse [5]. Nous étudions dans ce chapitre, les topologies A -artinienne sur $K = \text{Fr}(A)$, l'anneau A étant supposé intègre. La proposition suivante caractérise les anneaux intègres A pour lesquels la topologie $\mathcal{C}_A$ sur K est A -artinienne :

Proposition 3.1 : *Soient A intègre et $K = \text{Fr}(A)$. La topologie $\mathcal{C}_A$ sur K est A -artinienne, si et seulement si A est semi-local noethérien de dimension 1, et dans ce cas, toutes les topologies A -linéaires non discrètes sur K sont artiniennes.*

Preuve :

1) Si $\mathcal{C}_A$ est artinienne, alors A/a est artinien pour tout idéal non nul a de A et donc A est noethérien de dimension 1. D'autre part, K/A est un A -module artinien, d'où (d'après [19], théorème A.7) K/A est somme directe des $(K/A)_{m_i}$ quand m_i parcourt le spectre maximal de A , et puisque K/A est A -artinien, cette somme est finie, donc A est semi-local.

2) Réciproquement, si A est noethérien semi-local de dimension 1, Matlis a démontré dans [19, th. 1] que K/A est un A -module artinien, et si M est un sous A -module non nul de K et $m \in M - \{0\}$ K/Am est isomorphe à K/A , la suite exacte $K/Am \longrightarrow K/M \longrightarrow 0$ montre que K/M est aussi A -artinien, d'où la conclusion.

Corollaire 3.2. : Un anneau intègre est ouvert pour une topologie artinienne de son corps des fractions, si et seulement si il est noethérien semi-local de dimension 1.

Dans le cas où A n'est pas semi-local, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3. : Pour A intègre de corps des fractions K , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Toute topologie A -linéaire de corps non discrète sur K est artinienne
- 2) A est noethérien de dimension 1.

Comme $\mathcal{E}^A$ est la plus fine des topologies A -linéaires de corps sur K , il suffit de montrer que $\mathcal{E}^A$ est artinienne, si et seulement si A est noethérien de dimension 1 :

- Si $\mathcal{E}^A$ est artinienne, K/IA_I est A -artinien pour tout idéal non nul I de A , donc A/I aussi, et par suite, A est noethérien de dimension 1.

- La réciproque résultera des deux lemmes suivants :

Lemme 3.4. (Ballet, [5]) : Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A , i l'application canonique $A \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$, M un $A_{\mathfrak{m}}$ -module. Pour que M soit artinien, il faut et il suffit que le A -module $i_*(M)$ soit artinien.

En effet : la condition est évidemment suffisante. Inversement, soit $\{M_n\}_{n \geq 0}$ une suite décroissante de sous A -modules de $i_*(M)$, alors il existe un entier n tel que $\{M_n\}_{n \geq 0} = \{M_{n+1}\}_{n \geq 0}$. Soit $s \in M_n/M_{n+1}$, il existe $t \notin \mathfrak{m}$ tel que $tx=0$. D'autre part, $\mathfrak{m} \subset \sqrt{\text{Ann } x}$ d'après ([5], prop. 1.3), et l'inclusion est stricte puisque $t \notin \mathfrak{m}$ d'où $\text{Ann } x = A$ puisque $\mathfrak{m}$ est maximal, par suite $x=0$ et $M_n = M_{n+1}$.

Lemme 3.5. : Soit A un anneau intègre de corps des fractions K , les deux pro-

propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) K/IA_I est A-artinien pour tout idéal non nul I de A
- 2) A est noethérien de dimension 1.

Preuve :

- Nous avons déjà vu que $1) \Rightarrow 2)$.

- Réciproquement, supposons A noethérien de dimension 1, et soit I un idéal non nul de A. Comme I est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux premiers et que $IA_I = \bigcap_{I \subset m} (IA_I)_m$, il suffit de montrer que $K/(IA_I)_m$ est A-artinien pour chaque $m \supset I$, et $K/(IA_I)_m$ est un A_m -module, donc d'après la proposition 3.1, il est A_m -artinien et puisque m est maximal, le lemme précédent 3.4 nous montre qu'il est A-artinien. c.q.f.d.

Nous voyons donc que $\mathcal{E}^A$ est artinienne, si et seulement si A est noethérien de dimension 1. D'où le théorème 3.3.

Comme corollaire de ce résultat, nous pouvons retrouver le théorème suivant de Cohen :

Théorème 3.6. [Cohen, 6 bis] : Si A est noethérien intègre de dimension 1, tout anneau intermédiaire B entre A et $K = \text{Fr}(A)$ est noethérien de dimension 1 et si A est semi-local, il en est de même de B.

En effet : toute topologie B-linéaire de corps sur K est A-linéaire, donc A-artinienne et par suite B-artinienne. D'autre part, il est évident que $\mathcal{E}_B$ est B-artinienne si $\mathcal{E}_A$ l'est.

Corollaire 3.7. : Si A est un anneau de valuation, $K = \text{Fr}(A)$ alors la topologie définie sur K par la valuation de A est A-artinienne, si et seulement si A est de valuation discrète.

Cela résulte du fait que l'anneau d'une valuation est noethérien, si et seulement si elle est discrète.

Corollaire 3.8. : Si A est un anneau "presque de Dedekind", $K = \text{Fr}(A)$ une topologie A -linéaire de corps non discrète sur K est artinienne, si et seulement si elle est borne supérieure d'une famille de topologies p -adiques ($p \in \text{Spec } A$).

En effet : pour tout $p \in \text{Spec } A$, A_p est un anneau de valuation discrète donc $\mathcal{C}_p$ est A_p -artinienne, et comme p est maximal elle est A -artinienne d'après 3.4., il en est donc de même d'une borne supérieure de $\mathcal{C}_p$.

Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ topologie de corps A -artinienne sur K . Si M est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$, $\text{Supp}(K/M)$ est fini d'où $M = \bigcap_{\text{fini } p} M_p$. On en déduit de la même manière que dans A.2.7 chapitre II, que $\mathcal{C}$ est borne supérieure d'une famille de topologies p -adiques.

Cette démonstration montre que le corollaire précédent est en fait un cas particulier du résultat plus général suivant :

Proposition 3.9. : Soient A intègre de dimension 1, $K = \text{Fr}(A)$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Les seules topologies de corps non discrètes A -artiennes sur K sont les bornes supérieures de familles de topologies p -adiques
- 2) Pour tout $p \in \text{Spec } A$, A_p est noethérien analytiquement irréductible.

En effet 1) entraîne que A_p est noethérien d'après 3.1 et pour toute valuation essentielle v de A_p , $\mathcal{C}_v$ est A_p -artinienne donc A -artinienne, $\mathcal{C}_v$ est donc une borne supérieure d'une famille de topologies p -adiques, on en déduit comme dans B.2.1 que A_p est analytiquement irréductible.

L'implication 2) $\implies$ 1) se démontre comme dans A.2.7.

Dimension > 1 : Dans ce cas, nous allons chercher parmi les topologies A -artiennes de K , celles qui sont bornes supérieures de topologies p -adiques. Les résultats obtenus généralisent ceux du chapitre I (où $\dim A=1$ et toutes les topologies considérées sont artiniennes).

Proposition 3.10. : Soient A un anneau noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$ et P un idéal premier non nul de A . La topologie $\mathcal{C}_P$ est A -artinienne sur K , si et seulement si P est maximal de hauteur 1.

Preuve :

1) Si $\mathcal{C}_P$ est A -artinienne, K/A_P est un A -module artinien donc A_P -module artinien d'où $\dim(A_P) = 1$ d'après 3.1 et par suite P est de hauteur 1. D'autre part, K/pA_P est aussi A -artinien, on en déduit que A/p est artinien, donc P est maximal.

2) Réciproquement, si P est maximal de hauteur 1, $K/p^n A_P$ est A_P -artinien d'après 3.1 et comme P est maximal, c'est aussi un A -module artinien en vertu de 3.4, donc $\mathcal{C}_P$ est A -artinienne.

Soit maintenant $\mathcal{C}$ une topologie A -artinienne de corps sur K , elle induit sur A une topologie artinienne. Si $\Omega_{\mathcal{C}}$ est la famille des idéaux maximaux de A ouverts pour cette topologie, nous allons comparer $\mathcal{C}$ et $\sup_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_m$: remarquons d'abord que si $\mathcal{C} = \sup_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_m$, les $\mathcal{C}_m$ sont artiniennes donc les m sont de hauteur 1 d'après la proposition précédente. La réciproque n'est pas vraie, il suffit de prendre A local de dimension 1 qui n'est pas de Mori, la topologie $\mathcal{C}_A$, où A' est la clôture intégrale de A , est A -artinienne mais n'est pas égale à $\mathcal{C}_m$.

Nous avons cependant la proposition suivante :

Proposition 3.11. : Si les éléments de $\Omega_{\mathcal{C}}$ sont de hauteur 1 et si $\hat{A}_m$ est intègre pour tout $m \in \Omega_{\mathcal{C}}$ alors $\mathcal{C} = \sup_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_m$.

Démonstration : Soient M un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$ et $a_M = M \cap A$.

Si $a_M \subset m$, alors $M_m \neq K$ donc M_m est un A_m -module de type fini puisque A_m est analytiquement irréductible. Par conséquent A_m est ouvert pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_m$.

Soit alors M' un autre voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$ tel que $a_M, A_{a_M} \subset M$ où $a_{M'} = M \cap A$. Or K/M étant artinien, $\text{Supp}(K/M)$ est fini et constitué d'éléments maximaux d'où $M \supset \bigcap \{a_M, A_{a_M}\}_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}}$ intersection finie dans laquelle ne figurent que les termes correspondants aux $m \supset a_{M'}$, car si $a_M \not\subset m$, il lui est étranger et $(a_M, A_{a_M})_m = K$ puisque A_m est de dimension 1 (les éléments de $\Omega_{\mathcal{C}}$ sont supposés de hauteur 1). $\mathcal{C}$ est donc moins fine que $\bigvee_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_m$, d'où l'égalité.

Les conditions de la proposition précédente sont vérifiées par exemple lorsque A est un anneau de Mori et le morphisme $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$ est injectif, en particulier, on a le :

Théorème 3.12. : Si A est noethérien intégralement clos, $\mathcal{C}$ une topologie A -artinienne de corps non discrète sur K , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1) \mathcal{C} = \bigvee_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_m$$

2) Pour tout M , sous-module de K , voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$, a_M est un idéal divisoriel de A .

Preuve : Il est évident que $1) \implies 2)$ puisque les m sont alors de hauteur 1 et les $\mathcal{C}_m$ possèdent un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 . Réciproquement, si 2) est vérifiée, $\text{Ass}(A/a_M)$ est formé d'idéaux premiers de hauteur 1, et comme A/a_M est artinien $\text{supp}(A/a_M) = \text{Ass}(A/a_M)$, donc les éléments de $\Omega_{\mathcal{C}}$ sont de hauteur 1, et puisque les localisés de A en $m \in \Omega_{\mathcal{C}}$ sont de valuation discrète, on est dans les conditions d'application de 3.11.

Corollaire 3.13. : Soit A noethérien intégralement clos, si $\mathcal{C}$ est artinienne et possède un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 , alors elle est borne supérieure d'une famille de topologies m -adiques.

C'est une généralisation du théorème A.1.9 du chapitre I.

Remarque et application aux anneaux de polynômes :

Les topologies artiniennes sur $K = \text{Fr}(A)$ sont liées aux idéaux maximaux de hauteur 1 de A , de tels idéaux n'existent pas toujours, par exemple $A[T]$ n'en contient que si A est un G-anneau (i.e. : l'intersection de ses idéaux premiers non nuls est non nulle) [cf. Gilmer : Pacific J. Maths Vol. 19, n° 2, 1966 th. 3]. Un anneau noethérien intègre est un G-anneau, si et seulement si il est semi local de dimension 1. On a alors le :

Théorème 3.14. : Soit A un anneau de Dedekind semi-local, $B = A[T]$. Alors toute topologie de corps $A[T]$ -artinienne sur $K(T)$ possédant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 induit sur K la topologie discrète.

En effet : $A[T]$ contient des idéaux maximaux de hauteur 1, d'après le corollaire précédent une topologie vérifiant les hypothèses du théorème est borne supérieure de topologies $\mathcal{C}_m$ (avec m maximal de hauteur 1), lesquelles induisent la topologie discrète sur K car $m \cap A = (0)$ puisque m ne peut être de la forme $pA[X]$ ($p \in \text{Spec} A$), ce dernier n'étant jamais maximal.

Remarque 3.15. : De tout ce qui précède, il résulte que si A est noethérien intégralement clos de dimension > 1 , il n'y a pas toujours de topologies A -artiniennes de corps sur K . C'est le cas par exemple lorsque des chaînes maximales d'idéaux premiers de A ont même longueur : anneaux de polynômes à plusieurs variables sur un corps, et plus généralement les anneaux réguliers.

Une généralisation :

Proposition 3.16. : Soit A noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$. Si $\mathcal{C} = \sup_{m \in \Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_m$ pour toute topologie A -artinienne de corps sur K , alors $\hat{A}_m$ est intègre pour tout idéal maximal de hauteur 1 de A .

En effet : Soient m un idéal maximal de hauteur 1 de A et v une valuation essentielle de $(A_m)'$ (clôture intégrale de A_m), $\mathcal{C}_v$ sa topologie :

comme A_m est de dimension 1, $\mathcal{E}_V$ est A_m -artinienne donc aussi A -artinienne puisque m est maximal, l'hypothèse implique alors que $\mathcal{E}_V = \mathcal{E}_m (\Omega_{\mathcal{E}_V} = \{m\})$ d'où on déduit deux choses :

- Toutes les valuations essentielles de $(A_m)'$ définissent la même topologie, elles sont identiques et A_m est unibranche.

- La topologie définie par les idéaux non nuls de $(A_m)'$ est égale à $\mathcal{E}_m$, c'est-à-dire A_m est de Mori, donc $\hat{A}_m$ est intègre.

Remarque 3.17. : Si A est tel que $\hat{A}_m$ soit intègre pour tout m maximal de hauteur 1 (par exemple $D[T]$ où D est noethérien semi-local de dimension 1), on peut montrer comme dans B.2.1 que toute topologie A -artinienne de corps possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" (dans le sens de B.2.1) de 0 est borne supérieure d'une famille de topologies m -adiques.

CHAPITRE IV

COMPACTITE LINEAIRE

Dans ce chapitre, on cherche à déterminer les anneaux intègres A pour lesquels $\text{Fr}(A)$ est A -linéairement compact pour une topologie de corps. A ce sujet, on connaît essentiellement les deux résultats suivants :

- 1) Si A est un anneau de valuation, alors $K = \text{Fr}(A)$ est linéairement compact pour la topologie de la valuation de A , si et seulement si il est maximal pour la relation d'extension immédiate [Kaplansky, (17)].
- 2) Si A est noethérien local complet, Ballet a démontré dans [6] que K est linéairement compact pour la topologie discrète, si et seulement si $\dim A \leq 1$.

Dans ces deux cas, K est linéairement compact pour $\mathcal{T}_A$ (topologie définie sur K par les idéaux non nuls de A), et dans le cas des anneaux de valuations, ceci est équivalent à la propriété : " K est linéairement compact pour la topologie discrète". La proposition suivante montre que c'est aussi vrai pour les anneaux noethériens.

Proposition 4.1. : *Soient A noethérien intègre et K son corps des fractions, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) K est linéairement compact pour $\mathcal{T}_A$.
- (2) K est linéairement compact pour la topologie discrète.
- (3) A est local complet de dimension 1.

Preuve :

- 1) (2) et (3) sont équivalentes d'après le résultat de Ballet cité plus haut.
- 2) (3) implique que la clôture intégrale de A est un anneau de valuation discrète et K est linéairement compact pour la topologie de cette valuation qui est identique à $\mathcal{T}_A$.

3) Reste à démontrer que $1) \implies 3)$: la propriété 1) implique que K est complet pour toute topologie A -linéaire non discrète (qui est moins fine que $\mathcal{C}_A$). En particulier, K est complet pour toutes les valuations essentielles de l'anneau de Krull A' (clôture intégrale de A) car d'après Schmidt [Math. Annalen 108 (1933) p. 1-25]. Si un corps est complet pour une valuation discrète, celle-ci est sa seule valuation discrète. On en déduit donc que (1) implique que l'anneau de Krull A' possède une seule valuation essentielle, c'est donc un anneau de valuation discrète, et par conséquent, A est local de dimension 1 complet.

Remarque : Contrairement à ce qu'affirme Bourbaki (Algèbre commutative, chap. VI Ex. 1, § 5), un anneau local intègre A peut donc être linéairement compact pour $\mathcal{C}_A$ sans que $K = \text{Fr}(A)$ le soit pour la même topologie, il suffit, d'après la proposition précédente, de prendre un anneau local noethérien intègre complet de dimension > 1 par exemple $K[[X_1, X_2]]$ où K est un corps.

Théorème 4.2. : *Soit A noethérien de Mori et de dimension 1, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) K est A -linéairement compact pour une topologie de corps.
- (2) A est local complet.

Preuve : Si A est local complet, K est strictement linéairement compact pour toute topologie A -linéaire de corps. Inversement : soient $\mathcal{C}$ une topologie A -linéaire de corps non discrète sur K supposée linéairement compacte et $M \neq K$ un sous A -module de K , voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$. Il existe au moins un $p \in \text{Spec } A$ tel que $M_p \neq K$, on distingue alors deux cas :

- 1) Si p ne contient pas le conducteur de A (dans A'), A_p est un anneau de valuation discrète et M_p est un A_p -module de type fini. Par suite A_p est ouvert pour $\mathcal{C}$ et donc $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_p$ qui sera alors complète, et d'après Schmidt, A' sera de valuation discrète complet.

2) Si p ne contient pas le conducteur, A_p n'est pas intégralement clas, mais il est de Mori. Soit $(A_p)' = V_1 \cap \dots \cap V_n$ sa clôture intégrale qui est un anneau de Dedekind semi-local (V_i valuations discrètes). Il existe $\alpha \in A_p$ tel que $\alpha(A_p)' \subset A_p$ et comme $M_p \neq K$, on aura aussi $M(A_p)' \neq K$. $M(A_p)'$ est alors un $(A_p)'$ -module, il existe par conséquent un indice i , $1 \leq i \leq n$ tel que $MV_i \neq K$. On conclut alors comme précédemment, en disant que K est complet pour V_i , donc c'est son seul anneau de valuation discrète, d'où A local complet.

Remarque :

1) L'hypothèse que A' est un A -module de type fini est essentielle comme le montre l'exemple d'un anneau noethérien local de dimension 1 non de Mori, dont la clôture intégrale est un anneau de valuation discrète complet, K est linéairement compact pour cette valuation, mais A n'est pas complet.

2) Il est possible que la compacité linéaire de K implique que A est de dimension 1, nous n'avons pas réussi à la démontrer ni à donner un contre exemple. Le résultat de Ballet cité plus haut montre qu'on ne peut espérer trouver un exemple avec une topologie définie par une valuation. On peut, suivant une idée de Ballet, se ramener au cas où A est local complet :

Soient en effet, A un anneau noethérien intègre, $K = \text{Fr}(A)$ qu'on suppose muni d'une topologie de corps, A -linéairement compacte $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}^*$ la topologie ayant un système fondamental de voisinages de 0 les sous modules ouverts pour $\mathcal{C}$ et abrités (Bourbaki, Chapitre III, § 2, Ex. 18). $\mathcal{C}^*$ est linéairement compact, en particulier K est complet pour $\mathcal{C}^*$. Soit $\mathcal{C}_0$ la topologie induite par $\mathcal{C}^*$ sur A , cette topologie est artiniennne et séparée. Soit $\hat{A}$ le séparé complété de A pour $\mathcal{C}_0$. Comme l'application $(x,y) \rightarrow xy$ de $A \times A \rightarrow K$ est continue ($A \times A$ muni de $\mathcal{C}_0$ et K de $\mathcal{C}^*$), l'injection $A \rightarrow K$ se prolonge en un monomorphisme d'anneau de $\hat{A}$ dans K , ainsi $\hat{A}$ est intègre de corps des fractions k . Mais d'après Ballet [5, Chapitre II, prop. 1.2], $\hat{A}$ est isomorphe à

$m_i \in \bigcap_{\mathcal{C}_0} \hat{A}_{m_i}$ ($\Omega_{\mathcal{C}_0}$: ensemble des idéaux maximaux de A ouverts pour $\mathcal{C}_0$), A_{m_i} étant le séparé complété de A_{m_i} muni de sa topologie de A -module déduite de $\mathcal{C}_0$, $\hat{A}_{m_i}$ est strictement linéairement compact local, et $\hat{A}$ est intègre et produit d'anneaux locaux donc local et $\Omega_{\mathcal{C}_0}$ est réduit à un élément m , $\hat{A} = \hat{A}_m$, on a donc les inclusions $A \subset A_m \subset \hat{A}_m \subset K$.

Pour pouvoir remplacer A par $\hat{A}_m$, il reste à démontrer que les sous A -modules de K ouverts pour $\mathcal{C}$ sont des $\hat{A}_m$ -modules. Comme un tel module est intersection d'ouverts de $\mathcal{C}^*$, il suffit de la faire pour les ouverts de $\mathcal{C}^*$: soient M ouvert pour $\mathcal{C}^*$ et $\xi \in M$: il est facile de voir que l'homothétie $x \rightarrow \xi x$ est continue pour $\mathcal{C}^*$, il existe donc N ouvert pour $\mathcal{C}^*$ tel que $\xi N \subset M$, $N \cap A$ est ouvert dans A , $A/N \cap A \approx \hat{A}/N \cap \hat{A}$ et $N \supset N \cap A$. Si maintenant $a' \in A$, il existe $a \in A$ tel que $a'-a \in N \cap \hat{A} \subset N$, donc $(a'-a)\xi \subset \xi N \subset M$ et comme $a\xi \in M$, on en déduit $a'\xi \in M$, d'où M est un $\hat{A}_m$ -module puisque $\hat{A} = \hat{A}_m$. On est ainsi ramené au cas où A est local complet et fermé dans K . On peut même supposer A régulier en vertu du théorème de Cohen.

Question : Soit A local complet et régulier, si $K = \text{Fr}(A)$ est A -linéairement compact pour une topologie de corps, A est-il de dimension 1 ?

Une généralisation : Le théorème 4.2 est encore vrai pour certains anneaux cohérents : on utilise le résultat suivant de Quentel.

Théorème 4.3. : *Un anneau local intégralement clos cohérent de dimension 1 est un anneau de valuation.*

D'où : un anneau intégralement clos cohérent de dimension 1 est un anneau de Prüfer. On en déduit que si A est intègre cohérent dont la clôture intégrale est un A -module de présentation finie, alors son corps des fractions est A -linéairement compact pour une topologie de corps non discrète, si et seulement si il est linéairement compact discret.

La démonstration est la même que celle de 4.2 en utilisant cette fois le fait qu'un corps ne peut être complet pour deux valuations de rang 1 non équivalentes (Ribenoim : théorie des valuations).

BIBLIOGRAPHIE

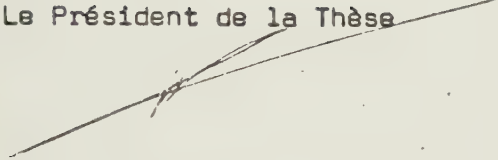
- [1] BOURBAKI : Topologie générale, Chapitre III (groupes topologiques).
- [2] BOURBAKI : Algèbre commutative, Chapitres I, III, IV.
- [3] BOURBAKI : Algèbre commutative, Chapitres V et VI.
- [4] BOURBAKI : Algèbre commutative, Chapitre VII.
- [5] BALLET B. : Thèse, 1971 (Orsay).
- [6] BALLET B. : Sur les modules linéairement compacts
Bulletin de la Société Mathématiques de France, (1972).
- [6 bis] COHEN : Commutative rings with restricted minimum condition
Duke Math. J. 17 (1950).
- [7] CORREL E. : Topologies on quotient fields.
Duke M.J. 35, n° 1 (1968), pp. 175-178.
- [8] DADE : Math. Annalen 148, (1962), pp. 65-66.
- [9] GILMER : Multiplicative ideal theory, II. Queen's papers on pure and applied Mathematics, n° 12.
- [10] GRECO-SALMON : Topics in m-adic topology.
- [10 bis] GRECO : Sull integrità e la fattorialità
(Rend. Semi Mat Padova XXXVI, 1966, p. 50.).
- [11] GROTHENDIECK : Eléments de géométrie algébrique, IV, 1ère et 2ème parties.
(Publications I.H.E.S.).
- [12] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 272, p. 1173-1174 (1971).
- [13] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 274, p. 444-446 (1972).
- [14] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 276, p. 93 (1973).
- [15] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 278, n° 15, p. 973 (1974).
- [16] JEBLI A. : C.R.A.S. (à paraître).
- [17] KAPLANSKY I. : Maximal fields with valuations
Duke M.J. t. 9 (1942), p. 303-321.

- [18] Mc ADAM : Gom down on polynomial rings
Canadian J. of Maths.
- [19] MATLIS E. : One dimensional noetherian domains
Canadian J. M 13 (1961), pp. 569-586.
- [20] MATLIS E. : Theory of Q-rings
T.A.M.S. 187, 1 (1974).
- [21] RIBENBOIM P. : Modules sur les anneaux de Dedekind
Summe Brasiliensis Mathematiciae Vol. 2, Fasc. 3 (1952)
pp. 21-36.
- [22] SCHMIDT : Math. annalen 108 (1933), p. 1-25.
- [23] SEYDI H. : Exposé au Colloque d'Algèbre Commutative, Rennes
(Janvier 1972).
- [24] WARNER et HEINE : Duke J. of Maths (1973).
- [25] ZARISKI-SAMUEL : Commutative Algebra, tome 2.



VU :

Le Président de la Thèse


P. SAMUEL

VU :

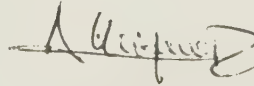
Le Directeur de Thèse


J. GUERINDON

VU et APPROUVE

RENNES, le 16 Mars 1975

Le Directeur de l'U.E.R. de Mathématiques
et Informatique


A. MIGNOT

VU pour autorisation

RENNES, le

Le Président de l'Université de RENNES,

C. CHAMPAUD





